UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

TEOREMAS DE LA APLICACION ABIERTA Y DEL GRAFICO CERRADO EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

Por:

WENCESLAO DE LOS RIOS

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática

UNIVERSIDAD DE PANAMA

TH

Aprobado por:

Director de Tesis

Jorge G. Rojo Ph. D.

Miembro del Jurado

scar Valdivia G., Ph. D.

Miembro del Jurado

Augusto Arriagada M.Sc.

Fecha 2 de Agosto de 1982

Ciudad Universitaria "Octavio Méndez Pereira"
ESTAFETA UNIVERSITARIA
PANAMA, R. DE P.

DEDICATORIA

A ELVIA, mi esposa
por su amor, comprensión, compañia,
sacrificio, apoyo y estímulo

A mis hijos: ISIS
IRIS
ILIANA e
IVAN ROBERTO

Tesoro de incalculable valor.
Fuente de inspiración de mis
esfuerzos e interés de superación

A ellos con mucho amor
dedico este trabajo de Graduación

A mis padres CARMEN y WENCE
por su apoyo y estímulo a culminar con éxito mis estudios

A mis HERMANOS y SOBRINOS
por su confianza y estímulo

Dedico con cariño este trabajo
de Graduación

A mis colegas del departamento de
Matemática por su constante voz de
estímulo; en especial a DIXIANA,
QUIQUE, JULIO y JOHNNY.
Compañeros de estudio, que juntos
pasamos muchas horas de amistad y desvelo
en el "Bunker".

A los próximos grupos de estudiantes
de Maestría; que sirva como estímulo,
para que logren sus propias metas.

Dedico con respeto este trabajo
de Graduación

AGRADECIMIENTO

Al Profesor Dr. JORGE ROJO

Por sus enseñanzas, que contribuyeron
en nuestra formación académica
Por la confianza depositada en nosotros.
Por su formidable orientación en la
realización de este trabajo.
Por sus sabios consejos.

Mi eterno y profundo Agradecimiento

Al Profesor Dr. OSCAR VALDIVIA

Por sus enseñanzas y sabios
consejos que contribuyeron en
nuestra formación profesional.

Mi eterno Agradecimiento

A la Universidad de Panamá

y sus entidades administrativas

La Vicerrectoria de Investigación y Post-Grado

La Vicerrectoria Académica

La Coordinación del Departamento de Matemática, representada en aquella ocasión por el Profesor FERNANDO RUIZ.

Por la Oportunidad y Confianza

Mi eterno Agradecimiento

A XIOMARA y JULIO

Por dar lo mejor de ellos
en la elaboración de esta tesis

Mi eterno Agradecimiento

INDICE

Página

Página

INTRODUCCIÓN

La investigación que hemos desarrollado, se centraliza en el estudio del teorema de la Aplicación Abierta y del teorema del Gráfico Cerrado en espacios lineales topológicos. Veamos lo que dicen estos teoremas.

Sean E y F dos espacios lineales topológicos

1. Teorema de la Aplicación Abierta.

   Toda aplicación lineal y continua de E sobre F es abierta.

2. Teorema del Gráfico Cerrado.

   Toda aplicación lineal de E en F, con el gráfico cerrado es continua.

En general estos enunciados no son ciertos, precisamente nuestro trabajo consiste en analizar las hipótesis bajo las cuales (1) y (2) tienen validez.

En el desarrollo clásico del Análisis Funcional se proponen y demuestran estos dos teoremas para E y F espacios de Banach. Motivó el interés por el estudio de los teoremas de la Aplicación Abierta y del Gráfico Cerrado para desarrollar nuestra tesis, el progreso que se ha desarrollado en ellos en los últimos años. Hoy sabemos que las hipótesis de ser E y F espacios de Banach son más fuertes de lo requerido. En nuestro trabajo analizamos cómo debilitando hipótesis o cambiando una propiedad por otra en el espacio de salida o de llegada, los resultados siguen siendo válidos. Otro de los motivos que nos llevaron a desarrollar este tema fue el de analizar algunas interesantes propiedades equivalentes al teorema del gráfico cerrado; propiedades estas que en algunos casos pareciera no tener ninguna relación con este teorema.

El capítulo primero es de generalidades, en el cual introducimos las definiciones y proposiciones que sirven de base a los capítulos siguientes. En este capítulo definimos los espacios Lineales Topológicos, espacios tonelados, bornológicos, límites inductivos etc. En el capítulo segundo, inicialmente estudiamos el teorema del gráfico cerrado y la aplicación abierta en espacios de dimensión finita; luego en general, analizamos las condiciones mínimas bajo las cuales se cumplen estos dos resultados hasta obtener los teoremas para espacios de Banach como una consecuencia de lo anterior. En el capítulo tercero generalizamos algunos resultados del capítulo segundo a espacios límite inductivo. En el cuarto y último capítulo, centramos nuestra atención sobre el teorema del Gráfico Cerrado. En la sección 4.1 analizamos el teorema de Mahowald y la generalización de este a espacios σ-tonelados y s-tonelados. En la sección 4.2 caracterizamos los espacios F localmente convexos y T_2, tales que toda aplicación lineal de un espacio tonelado E, que tenga el gráfico cerrado sea continua. Obtenemos en esta sección una serie de propiedades equivalentes al teorema del gráfico cerrado para E (el espacio de salida) tonelado. En la sección 4.3 desarrollamos un trabajo análogo a 4.2 pero en esta ocasión para E (el espacio de salida) bornológico.

Esperamos que este trabajo resulte interesante y que motive a los estudiosos a profundizar sus conocimientos en estos temas.

CAPITULO I

GENERALIDADES

1.1 ESPACIOS LINEALES TOPOLOGICOS.

1.1.1 <u>DEFINICION</u>: Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio topológico. $(E,\mathcal{T})$ es un espacio lineal topológico abreviadamente e.l.t.) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tal que las aplicaciones:

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$
$$(x,y) \rightsquigarrow x+y$$

y

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda ,x) \rightsquigarrow \lambda .x$$

son continuas.

El e.l.t. E es T_2, si la topología $\mathcal{T}$ sobre E es T_2.

En un e.l.t. todo T_0 es T_1 y T_2.

1.1.2 <u>EJEMPLOS</u>:

a. $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ es un e.l.t. sobre $\mathbb{R}$ donde $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ es la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

b. $(\mathcal{C}[0,1] , \| \|_\infty)$. El conjunto de las funciones continuas definidas en $[0,1]$ con valor real, con la topología de la norma del supremo (abreviadamente sup.) es un e.l.t. sobre $\mathbb{R}$.

c. $(\ell^\infty, \| \|_\infty)$. El conjunto de las sucesiones acotadas, con la topología de la norma del sup. es un e.l.t. sobre $\mathbb{R}$.

d. $(\ell^1, \|\ \|_1)$. El conjunto de las sucesiones de suma en módulo convergente, con la topología de la norma definida por $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es un e.l.t. sobre $\mathbb{K}$.

e. $(C_0, \|\ \|_\infty)$. El conjunto de las sucesiones que convergen a cero, con la topología de la norma del sup. es un e.l.t. sobre $\mathbb{K}$.

f. En general todo espacio normado es un e.l.t.

1.1.3 <u>DEFINICION</u>: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

a. Un sub-conjunto A de E es equilibrado si para todo

$x \in A \Longrightarrow \lambda x \in A \ \forall |\lambda| \leq 1.\ \lambda \in \mathbb{K}$.

b. Un sub-conjunto A de E, absorbe a otro sub-conjunto B de E, si existe $\alpha > 0$ tal que $B \subseteq \lambda A$, $\forall |\lambda| \geq \alpha$

c. Un sub-conjunto A de E, es absorbente, si A absorbe a cada punto de E.

d. Sea A un sub-conjunto de E, $A \neq \emptyset$. El sub-conjunto equilibrado más pequeño de E, que contiene a A, lo llamaremos la cápsula equilibrada de A, y lo denotamos por e(A).

e. Un sub-conjunto A de E, es convexo, si $\forall$ x, y $\in$ A, y todo par de números reales positivos α y β tales que $\alpha + \beta = 1$ resulta $\alpha x + \beta y \in A$.

f. Sea A un sub-conjunto de E, $A \neq \emptyset$. El sub-conjunto convexo más pequeño de E, que contiene a A, lo llamaremos la cápsula convexa de A, y lo denotaremos por c(A).

g. Un sub-conjunto A de E, es un disco si es equilibrado y convexo a la vez.

h. Sea A un sub-conjunto de E, $A \neq \emptyset$ al disco más pequeño de E, que contiene a A, lo llamaremos la cápsula disqueada de A, y lo denotaremos $\Gamma(A)$.

1.1.4 DEFINICION: Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.t. Un conjunto V es una vecindad de $x \in E$, si existe un conjunto $U \in \mathcal{T}$ tal que:

$$x \in U \subseteq V$$

Sea $\mathcal{V}(x, \mathcal{T})$ la familia de todas las vecindades de x, entonces $\mathcal{V}(x, \mathcal{T})$ tiene las siguientes propiedades.

1. $\forall\ V \in \mathcal{V}(x, \mathcal{T}),\ V \neq \emptyset$
2. $\forall\ W \subseteq E$, tal que existe $V \in \mathcal{V}(x, \mathcal{T})$ y $V \subseteq W \Longrightarrow W \in \mathcal{V}(x, \mathcal{T})$.
3. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x, \mathcal{T}) \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x, \mathcal{T})$
4. $U \in \mathcal{V}(x, \mathcal{T}) \Longrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x, \mathcal{T})$ tal que $V \subseteq U$, y $U \in \mathcal{V}(y, \mathcal{T})$, $\forall\ y \in V$.

1.1.5 Ejemplo: Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.t. Sea $x \in E$; la familia de todas las vecindades del punto x, es un filtro en E, que denotaremos por $\mathcal{V}(x, \mathcal{T})$ y lo llamaremos el filtro de vecindades de x.

Una base del filtro de vecindades de un punto x; es llamado también un sistema fundamental de $\mathcal{V}(x, \mathcal{T})$.

1.1.6 TEOREMA: Un e.l.t. y T_2 $(E, \mathcal{T})$ es metrizable si existe un sistema fundamental numerable de $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$.

1.1.7 DEFINICION: Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.t. Sea $A \subseteq E$.

A es completo si todo filtro de Cauchy en A converge a un punto de A. A es casi-completo si todo sub-conjunto de A cerrado y acotado es completo; o en forma equivalente A contiene los puntos de adherencia de todos sus sub-conjuntos acotados.

1.1.8 <u>DEFINICION</u>: Un e.l.t. $(E, \mathcal{T})$ metrizable y completo es llamado un F-espacio.

1.1.9 <u>TEOREMA</u>: Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.t. T_2 Entonces existe un e.l.t. T_2 y completo denotado por $\hat{E}$ tal que E es isomorfo a un sub-espacio denso E_0 de $\hat{E}$. El espacio $\hat{E}$ es único, a menos de un isomorfismo.

1.1.10 <u>DEFINICION</u>: Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.t. y $A \subseteq E$. A es nunca-denso si

$$\overset{i}{\overline{A}} = \emptyset$$

Un sub-conjunto X de E es de primera categoría, si X, es la unión numerable de conjuntos nunca-densos.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ , \ \forall n \ \overset{i}{\overline{A_n}} = \emptyset$$

Un sub-conjunto X de E es de segunda categoría, si X no es de primera categoría. $(E, \mathcal{T})$ es un espacio-Baire si todo abierto no vacío de E es de segunda categoría. Todo espacio Baire es de segunda categoría.

1.1.11 <u>TEOREMA</u> (Baire): Todo e.t. $(E, \mathcal{T})$ metrizable y completo es un espacio Baire. Como consecuencia, todo F-espacio es Baire.

1.1.12 <u>TOPOLOGIA COCIENTE</u>: Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.t. y

F un sub-espacio cerrado de E. Sea $^{E}/_{F}$ el espacio vectorial cociente.

Sea:

$\varphi: E \longrightarrow {}^{E}/_{F}$ la aplicación canónica suryectiva. Es decir $\forall x \in E \quad \varphi(x) = \bar{x} = x + F$.

Un conjunto A es abierto en $^{E}/_{F} \Longleftrightarrow \varphi^{-1}(A)$ es abierto en E. La topología definida así, es llamada la topología cociente sobre $^{E}/_{F}$ y la denotaremos por $\mathcal{T}_c$; es la topología final para el par (E, φ).

1.1.13 DEFINICION: Sea E un espacio vectorial y F un sub-espacio vectorial de E. Sea $x \in E$; el sub-conjunto H de E : $H = x + F$ es llamado un sub-espacio afín de E. $(x \in F \Longrightarrow H = F)$.

1.1.14 DEFINICION: Sea E un espacio vectorial real. Un sub-conjunto H de E es un hiperplano, si H es un sub-espacio propio maximal de E.

Si H es un hiperplano, entonces para cada $x \in (E - H)$, tenemos $E = H + \mathbb{R}_x$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales.

1.1.15 TEOREMA DE MAZUR (Forma Geométrica de Hahn Banach): Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.t.; sea $A \neq \emptyset$, un sub-conjunto abierto y convexo de E. Sea M un sub-espacio lineal afín de E tal que $M \cap A = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano afín cerrado H tal que $M \subseteq H$ y $H \cap A = \emptyset$.

1,2 ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

1.2.1 DEFINICION: Un e.l.t. $(E, \mathcal{T})$ es localmente convexo, (abreviadamente l.c.) si existe un sistema fundamental de vecindades convexas, del filtro de vecindades del 0.

1.2.2 EJEMPLOS: Todo espacio normado es l.c.. Todos los ejemplos de 1.1.2 son l.c.

1.2.3 DEFINICION: Todo espacio $(E, \mathcal{T})$ l.c. metrizable y completo lo llamaremos un espacio Frechet. Es decir todo F-espacio l.c. es un Frechet.

1.2.4 DEFINICION: Sea E un espacio vectorial real. Sea p una función definida en E con valores reales tal que:

1. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in E$
2. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$

Una función con estas propiedades la llamaremos una semi-norma.

De la definición anterior concluimos que:

$p(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in E$ y $p(0) = 0$

Si además:

$\forall x \in E \; ; \; p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

p es llamada una norma sobre E.

1.2.5 DEFINICION: Sea E un e.l. y A un sub-conjunto de E. Para cada $x \in E$, definimos:

$$Ax = \left\{ \rho \in \mathbb{R} \; / \; \rho > 0, \; x \in \rho A \right\}$$

si $A = \emptyset$, entonces $Ax = \emptyset$

1.2.6 <u>DEFINICION</u>: Sean E un espacio lineal y A un Sub-conjunto de E. Definimos la Jauge o funcional de Minkowski de A, denotada por g_A de E en $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ por

$$g_A(x) = \begin{cases} \text{Inf } Ax & \text{si } Ax \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } Ax = \emptyset \end{cases}$$

Es consecuencia de la definición que $g_A(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in E$.

1.2.7 <u>PROPOSICION</u>: Sea E un espacio lineal y A un sub-conjunto de E. Si A es un disco absorbente, entonces la jauge de A es una semi-norma sobre E.

Además, si $(E,\mathcal{T})$ es un e.l.t. y A absorbente y convexo, entonces:

a. A cerrado $\Longrightarrow A = \{x \in E \ / \ g_A(x) \leqslant 1\}$

b. A abierto $\Longrightarrow A = \{x \in E \ / \ g_A(x) < 1\}$

c. $A \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}) \Longleftrightarrow g_A$ continua en 0

1.2.8 <u>PROPOSICION</u>:

a. Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.t. Existe una correspondencia biunívoca entre todos los discos cerrados de E que contienen a cero como punto interior y el conjunto de todas las semi-normas continuas definidas en $(E,\mathcal{T})$.

b. Como un e.l.t. tiene un sistema fundamental de discos cerrados del filtro de vecindades del 0. La topología l.c. $\mathcal{T}$ sobre E puede ser definida por una familia de semi-normas continuas sobre E.

c. El conjunto de todas las semi-normas sobre E, define una topología l.c. sobre E; esta es la topología l.c. más fina sobre E donde el conjunto de todos los discos absorbentes constituyen una base del filtro de vecindades del cero.

1.2.9 DEFINICION: Un e.l.t. $(E,\mathcal{T})$ es normado, si la topología $\mathcal{T}$, puede ser definida por una norma. Si además el espacio es completo para la topología de la norma, se dice que el espacio es de Banach.

1.2.10 TEOREMA DE HAHN-BANACH: Sea E un espacio vectorial real y p una semi-norma sobre E. Sea M un subespacio vectorial y f una forma lineal definida en M tal que $|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in M$

Entonces existe una forma lineal $\tilde{f}$, definida sobre E que extiende a f y tal que:

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$$

1.2.11 DEFINICION: Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.t. Un subconjunto T de E que sea un disco, cerrado y absorbente lo llamaremos un tonel.

$(E,\mathcal{T})$ es tonelado si todo tonel T de E es una vecindad del cero.

1.2.12 PROPOSICION: Todo e.l.c. Baire es tonelado. En consecuencia todo Frechet es tonelado.

Los conjuntos tonelados los tomaremos en e.l.c.

1.2.13 DEFINICION: Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c. Sea $B \subset E$

B es acotado, si toda $V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T})$ absorbe a B.

Todo conjunto finito y toda sucesión convergente son acotados. También toda sucesión de Cauchy es acotada. El conjunto de acotados para una topología $\mathcal{T}$, lo denotaremos $A(\mathcal{T})$.

1.2.14 <u>DEFINICION</u>: Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c. un subconjunto A de E es bornívoro si A absorbe a todo conjunto acotado B de E.

$(E,\mathcal{T})$ es bornológico, si todo disco bornívoro es una vecindad del cero. Todo espacio l.c. y metrizable es bornológico.

1.3 TEORIA DE LA DUALIDAD.

1.3.1 <u>DEFINICION</u>: Dos espacios vectoriales E y F están en dualidad, si existe una forma bilineal B definida en E x F.

$$B : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x,y) \rightsquigarrow B(x,y)$$

La dualidad es separante en E, si:

$$\forall x \in E,\ x \neq 0 \Longrightarrow \exists y \in F \text{ tal que } B(x,y) \neq 0$$

o en forma equivalente si:

$$\forall x \in E,\ B(x,y) = 0\ \ \forall y \in F \Longrightarrow x = 0$$

Análogamente se define la dualidad separante en F.

Una dualidad separante en E y F es un sistema dual.

1.3.2 <u>EJEMPLOS</u>:

a. Sea E un espacio vectorial y E* su dual algebráico.

Sea $B = \langle\, ; \rangle$

$$\langle\, ; \rangle : E \times E^* \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x,f) \rightsquigarrow \langle x,f \rangle = f(x)$$

entonces:

$(E, E^*, \langle ; \rangle)$ es un sistema dual. $\langle ; \rangle$ se llama la forma bilineal canónica entre E y E^*.

b. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. entonces $(E, E', \langle\ \rangle)$ es separante en E'. Si además E es T_2, entonces $(E, E', \langle\ \rangle)$ es un sistema dual.

1.3.3 DEFINICION: Sea (E, F, B) una dualidad. Para cada $y \in F$, consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} p_y : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow p_y(x) = |B(x,y)| \end{aligned}$$

p_y es una semi-norma. En consecuencia la familia $\{p_y / y \in F\}$ es una colección de semi-normas sobre E que determinan una única topología l.c. sobre E que denotaremos $\sigma(E, F)$. $\sigma(E, F)$ es la topología l.c. la menos fina que hace continuas las semi-normas p_y, $y \in F$. Una base para $\mathcal{V}(0, \sigma(E, F))$ la constituyen los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_{p_{y_i}} = \{x \in E \,/\, p_{y_i}(x) \leqslant \varepsilon_i \ , \ \forall i=1,\dots n\}$$

donde $\forall i=1,\dots,n$ $\varepsilon_i > 0$ y $y_i \in F$.

Si $A \subset F$ es finito, consideramos la semi-norma.

$$p_A(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{y_i}(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |B(x,y_i)| \ , \ y_i \in A$$

y la familia

$\{p_A / A \subset F,\ A \text{ finito}\}$ también determina $\sigma(E,F)$.

En este caso una base para $\mathcal{V}(0, \sigma(E,F))$ está dada por conjuntos de la forma:

$$\varepsilon V_{p_A} = \left\{ x \in E \ / \ p_A(x) \leqslant \varepsilon \right\}$$

La topología $\sigma(E,F)$ se denomina la topología débil sobre E. Análogamente se define la topología débil $\sigma(F,E)$ sobre F.

Un sub-conjunto A de E es $\sigma(E,F)$ acotado $\Longleftrightarrow \forall y \in F$ $\exists \lambda > 0$ tal que

$$\sup_{x \in A} |B(x,y)| \leqslant \lambda$$

1.3.4 <u>PROPOSICION</u>: Sea (E,F,B) una dualidad y $\sigma(E,F)$, $\sigma(F,E)$ las topología débiles sobre E y F respectivamente. Entonces

a. $\sigma(E,F)$ (resp. $\sigma(F,E)$) es la topología menos fina sobre E (resp. sobre F) tal que las formas $B(\cdot,y) : E \longrightarrow \mathbb{K}$, $y \in F$ (resp. $B(x,\cdot) : F \longrightarrow \mathbb{K}$ $x \in E$) son todas continuas.

b. Si B es separante en F (resp. en E), entonces $\sigma(E,F)$ (resp. $\sigma(F,E)$) es la topología l.c. la menos fina sobre E (resp. sobre F) para la cual F (resp. E) es el dual topologíco de $(E, \sigma(E,F))$ (resp. $(F, \sigma(F,E))$).

c. $\sigma(E,F)$ (resp. $\sigma(F,E)$) es $T_2 \Longleftrightarrow$ la dualidad es separante en E (resp. F).

d. Sea N un sub-espacio propio de F (resp. E) y consideremos la restricción de B a E x N (resp. N x F).

Si B es separante en F entonces $\sigma(E,N) \lneq \sigma(E,F)$, (resp. $\sigma(N.F) \lneq \sigma(E,F)$).

1.3.5 DEFINICION: Sea (E,F,B) una dualidad, y A un sub-conjunto de F, entonces el polar de A es el sub-conjunto de E, definido por:

$$A^\circ = \left\{ x \in E \,/\, |B(x,y)| \leqslant 1, \ \forall y \in A \right\}$$
$$= \left\{ x \in E/ \sup_{y \in A} |B(x,y)| \leqslant 1 \right\}$$

En forma análoga se define el polar de un sub-conjunto de E.

1.3.6 PROPOSICION: Sea (E,F,B) una dualidad, entonces:

a. $A_1 \subset A_2 \subset F \Longrightarrow A_2{}^\circ \subset A_1{}^\circ$

b. $A \subset F, \quad D = e(A) \Longrightarrow A^\circ = D^\circ$

c. $A \subseteq A^{\circ\circ}$

d. $A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$

e. $A \subseteq F \Longrightarrow A^\circ$ es un disco $\sigma(E,F)$-cerrado

f. $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \lambda \neq 0$

g. A° es absorbente $\Longleftrightarrow$ A es $\sigma(F,E)$-acotado

h. Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de sub-conjuntos de F, entonces:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$$

1.3.7 TEOREMA (Bipolares): Sea (E,F,B) una dualidad separante en F y $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. Entonces

$$\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(E,F)} = A^{\circ\circ}$$

Es decir $A^{\circ\circ}$ es el menor disco $\sigma(E,F)$-cerrado de E, que contiene a A.

1.3.8 DEFINICION: Sea (E,F,B) una dualidad. Si M es un sub-conjunto de E, los elementos $y \in F$ que son ortogonales a M, es decir tales que $B(x,y) = 0 \ \forall x \in M$, constituyen un sub-espacio de F, llamado el sub-espacio ortogonal a M y denotado por $M^{\perp}$.

1.3.9 PROPOSICION: Sea (E,F,B) una dualidad. Entonces:

a. $M_1 \subseteq M_2 \subseteq E \Longrightarrow M_2^{\perp} \subseteq M_1^{\perp}$

b. $M \subseteq M^{\perp\perp}$

c. $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$

d. $M^{\perp}$ es $\sigma(F,E)$-cerrado

e. $M^{\perp\perp}$ es el sub-espacio $\sigma(E,F)$-cerrado, generado por M.

1.3.10 G-Top: Sea (E,F,B) una dualidad, y sea $A(\sigma(F,E))$ la familia de conjuntos $\sigma(F,E)$-acotados de F.

Sea G una sub-familia no vacía de $A(\sigma(F,E))$; por 1.3.6. el conjunto de polares de los elementos de G son todos discos absorbentes; entonces existe una única topología l.c., $\mathcal{T}$ sobre E tal que las intersecciones finitas de los conjuntos de la forma:

$$\lambda A^{\circ}, \quad \lambda > 0, \ A \in G$$

constituyen una base para $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$. La topología $\mathcal{T}$ se denota por G-Top, denominada la topología de la convergencia uniforme, sobre los conjuntos $A \in G$. La G-Top se puede describir mediante semi-normas.

Sea $A \in G$, definimos:

$$\begin{aligned} q_A : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \sup_{y \in A} |B(x,y)| \end{aligned}$$

la cual es una semi-norma sobre E, y $V_{q_A} = A°$

Por lo tanto la familia de semi-normas $\{q_A\}_{A \in G}$ determina la G-Top.

Por último: Sean $G_1, G_2 \subseteq A(\sigma(F,E))$, entonces

$$G_1 \subseteq G_2 \Longrightarrow G_1 - \text{Top} \preccurlyeq G_2 - \text{Top}$$

1.3.11 <u>PROPOSICION</u>: Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.t. y E' su dual topologíco, sea

$$E_q(\mathcal{T}) = \{H \subseteq E' \,/\, H \text{ es equicontinua}\}$$

Entonces

a. $\forall H \subseteq E'$: $H \in E_q(\mathcal{T}) \Longleftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}) \,/\, H \subseteq V°$

b. $Eq(\mathcal{T}) \subseteq A(\sigma(E',E))$. Si E es tonelado entonces $Eq(\mathcal{T}) = A(\sigma(E',E))$.

c. $\mathcal{T} = Eq(\mathcal{T})$ - top

1.3.12 <u>DEFINICION</u>: Sea (E,F,B) una dualidad y sea G_M la familia de partes de F definida por:

$G_M = \{A \subseteq F \,/\, A \text{ es un disco } \sigma(F,E)\text{-compacto}\}$

$G_M \subseteq A(\sigma(F,E))$, pues toda parte $\sigma(F,E)$-compacta es $\sigma(F,E)$-acotada.

La G_M - top sobre E la llamaremos la topología de Mackey y la denotaremos por:

$$\mathcal{T}(E,F)$$

1.3.13 DEFINICION: Sea (E,F,B) una dualidad. La familia G de todos los conjuntos finitos de E, define la G-Top sobre F, llamada la topología de la convergencia simple, a la cual hemos llamado también la topología débil $\sigma(F,E)$. Los $\sigma(E,F)$-acotados de E, definen la G-Top sobre F, denominada la topología de la convergencia uniforme o topología fuerte, denotada por B(F,E). Si E y F son espacios normados, la topología fuerte o de la convergencia uniforme está definida por:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$$

1.3.14 DEFINICION: Sean (E,F,B) una dualidad separante en F y τ una topología l.c. sobre E. Decimos que τ es compatible con la dualidad, si F es el dual topológico de E, provisto de la topología τ. Es decir, si

$$E' = (E, \tau)' = F$$

1.3.15 TEOREMA (Mackey-Arens): Sea (E,F,B) un sistema dual y τ una topología l.c. sobre E. Entonces:

$$(E,\tau)' = F \Longleftrightarrow (\exists G \subseteq G_M \text{ tal que } \tau = G\text{-Top y } F = \bigcup_{A\in G} A)$$

como consecuencia tenemos que:

$$(E,\tau)' = F \Longleftrightarrow \sigma(E,F) \leq \tau \leq \mathcal{T}(E,F)$$

Es decir que τ es compatible con la dualidad (E,F,B) si τ es más fina que la topología débil $\sigma(E,F)$; pero menos fina que la de Mackey $\mathcal{T}(E,F)$.

1.3.16 PROPOSICION: Sea (E,F,B) una dualidad separante en F. Entonces los conjuntos convexos y cerrados de E, son los mismos para todas las topologías compatibles sobre E.

1.3.17 TEOREMA (Mackey): Sea (E,τ) un e.l.c. compatible con la dualidad $(E,E',\langle\ \rangle)$, entonces:

$M \subseteq F$ es $\sigma(E,E')$-acotado $\Longleftrightarrow$ M es $\mathcal{T}(E,E')$-acotado.

Es decir los acotados en todas las topologías compatibles son los mismos.

1.3.18 PROPOSICION: Sea (E,τ) un e.l.c. τ coincide con la topología de Mackey $\mathcal{T}(E,E')$ si y sólo si todo convexo, $\sigma(E',E)$ relativamente compacto es equicontínuo.

1.3.19 PROPOSICION: Sea (E,G,B) un sistema dual y $F \subseteq G$, entonces:

$$\mathcal{T}(E,F) \leqslant \mathcal{T}(E,G)$$

PRUEBA:

$\sigma(F,E) = \sigma(G,E)/_F$. Sea A un disco $\sigma(F,E)$-compacto. Sea $(\Theta_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos de la topología débil $\sigma(G,E)$ que cubre a A.

$$(\bigcup_{i\in I}\Theta_i \supset A \quad y \quad A \subseteq F) \Longrightarrow (\bigcup_{i\in I}\Theta_i) \cap F \supset A$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{i\in I}(\Theta_i \cap F) \supseteq A$$

Como A es $\sigma(F,E)$-compacto entonces:

$\exists\, 0_1, \ldots 0_n \in \sigma(G,E)$, tales que $\bigcup_{i=1}^{n} (0_i \cap F) \supseteq A$

$\Longrightarrow (\bigcup_{i=1}^{n} 0_i) \cap F \supseteq A$

$\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} 0_i \supseteq A$

$\Longrightarrow$ A es un disco $\sigma(G,E)$-compacto

Sea $G_1 = \{ A \,/\, A$ es un disco $\sigma(F,E)$-compacto $\}$

$G_2 = \{ A \,/\, A$ es un disco $\sigma(G,E)$-compacto $\}$

$\Longrightarrow G_1 \subseteq G_2$

$\Longrightarrow G_1\text{-top} \leqslant G_2\text{-top}$

Pero:

$(G_1\text{-top} = \mathcal{T}(E,F)$ y $G_2\text{-top} = \mathcal{T}(E,G) \Longrightarrow \mathcal{T}(E,F) \leqslant \mathcal{T}(E,G)$

CAPITULO 2

TEOREMAS DE LA APLICACION ABIERTA Y DEL GRAFICO CERRADO EN E.L.C.

2.1 ESPACIOS DE DIMENSION FINITA.

2.1.1 DEFINICION: Sean E y F dos e.l.t. y f una aplicación lineal de E en F. Se dice que f tiene el gráfico cerrado, si el conjunto

$$G_f = \left\{(x,y)/\ y = f(x),\ x \in E\right\}$$

es cerrado en E x F con la topología producto

$$\tau_{E\times F} = \tau_E \times \tau_F.$$

2.1.2 PROPOSICION: Sean E y F dos e.l.t. y además F T_2. Sea f una aplicación lineal y continua de E en F. Entonces el gráfico de f es cerrado.

PRUEBA:

Sea $G = \left\{(x,\ f(x))\ /\ x \in E\right\}$. el gráfico de f

$(x,y) \in \overline{G} \Longrightarrow \forall W \in \mathcal{V}((x,y), \tau_{E\times F})$ es $W \cap G \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$ y $\forall V \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$, V cerrado

$$((x + U) \times (y + V)) \cap G \neq \emptyset$$

$\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$, $\forall V \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$, V cerrado

$$(x + U) \cap f^{-1}(y + V) \neq \emptyset$$

$\Longrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$, V cerrado y $\forall U \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$

$\exists x_\alpha \in x + U$ tal que $f(x_\alpha) \in y + V)$

Como U es arbitrario $\Longrightarrow x_\alpha \xrightarrow{\tau_E} x$

por la continuidad de f $\Longrightarrow f(x_\alpha) \xrightarrow{\tau_F} f(x)$

$\Longrightarrow f(x) \in \overline{y + V} = y + V$, pues V es cerrado.

$\Longrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$, V cerrado, $f(x) \in y + V$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}(0, \tau_F)} (y + V) = \{y\}, \text{ pues } F \text{ es } T_2$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = y, \text{ luego } (x,y) \in G \text{ y } G \text{ es cerrado.}$$

2.1.3 COROLARIO: Sean E y F dos e.l.t. T_2 y f una aplicación lineal, biyectiva y abierta de E en F. Entonces el gráfico G de f es equivalente al de f^{-1} y G es cerrado.

PRUEBA:

Como $f : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal, biyectiva y abierta, existe $g = f^{-1}$

$$g : F \longrightarrow E \text{ Lineal y continua}$$

por 2.1.2 el gráfico G' de g es cerrado.

Sea $\phi : E \times F \longrightarrow F \times E$

$$(x,y) \rightsquigarrow (y,x)$$

ϕ así definida es continua y

$$\phi^{-1}(G') = \left\{ (x,y) \in E \times F \ / \ (y,x) \in G' \right\} = G$$

$\Longrightarrow$ G es cerrado en E x F

2.1.4 OBSERVACION: 1. Como la compuesta de dos aplicaciones continuas es continua; entonces el gráfico de la compuesta de dos aplicaciones lineales y continuas entre e.l.t., tiene el gráfico cerrado.

2. En general, la compuesta de dos aplicaciones con el gráfico cerrado no tiene el gráfico cerrado, lo que si podemos afirmar es:

2.1.5 PROPOSICION: Sean E, F y H tres e.l.t. F y H Hausdorff. Sea f una aplicación lineal de E en F, y g una aplicación lineal de F en H. Entonces, si el gráfico de g es cerrado y f continua; el gráfico de $h = g \circ f$ de E en H es cerrado.

PRUEBA:

Sea
$$\phi : E \times H \longrightarrow F \times H$$
$$(x,z) \rightsquigarrow (f(x),z)$$

ϕ así definida es continua, y
$$G_1 = \{(y,z) \;/\; z = g(y),\ y \in F\}$$
es cerrado en $E \times H$, pero
$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(G_1) &= \{(x,z) \in E \times H \;/\; \phi(x,z) \in G_1\} \\
&= \{(x,z) \in E \times H \;/\; (f(x),z) \in G_1\} \\
&= \{(x,z) \in E \times H \;/\; z = g \circ f\ (x)\} \\
&= \{(x,z) \;/\; z = h(x),\ x \in E\} \\
&= G_2
\end{aligned}$$
donde G_2 es el gráfico de h.

El recíproco de la proposición 2.1.2 en general no es cierto, como podemos apreciar en el siguiente ejemplo:

2.1.6 EJEMPLO: El operador Diferencial

Sea $F = \mathcal{C}[0,1]$, el espacio normado de las funciones continuas definidas en $[0,1]$ con valores en $\mathbb{R}$; con la norma $\| \ \|_\infty$, definida por
$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$$
Sea E el sub-espacio de F, definido por
$$E = \{x \in F \;/\; x' \in F\}$$

Es decir el conjunto de funciones continuas definidas en $[0,1]$, con primera derivada continua, entonces

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \rightsquigarrow x'$$

es una aplicación lineal entre e.l.t. T_2, que tiene el gráfico cerrado, pero no es continua. (En particular, entre espacios normados).

<u>PRUEBA</u>:

i. Sea $G = \left\{ (x,x') \ / \ x \in E \right\}$ el gráfico de f y sea $(x,y) \in \overline{G}$. Entonces

$\exists \, (x_n, x'_n)_{n \geq 1} \subseteq G$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y
$x'_n \longrightarrow y$

Como la convergencia en la norma del sup en $\mathcal{C}[0,1]$ es la convergencia uniforme en $[0,1]$. Tenemos que para $0 \leq t \leq 1$ es

$$\begin{aligned}
\int_0^t y(\tau)\,d\tau &= \int_0^t \lim x'_n(\tau)\,d\tau \\
&= \lim_n \int_0^t x'_n(\tau)\,d\tau \\
&= \lim_n \left(x_n(\tau) + C\Big]_0^t\right) \\
&= \lim_n \left(x_n(t) + C - x_n(0) - C\right) \\
&= \lim_n \left(x_n(t) - x(0)\right) \\
&= x(t) - x(0)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau$$

$$\Longrightarrow x \in E \quad y \quad x' = D_t\left(x(0) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau\right) = y$$

$\Longrightarrow f(x) = y$

Es decir $(x,y) \in G$ y G es cerrado

ii. Probaremos que f no es continua. Basta probar que f no es acotada, pues toda aplicación lineal entre espacios normados es continua si y sólo si es acotada [7] (teorema 2.7.9, página 97).

Sea $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$

entonces
$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \sup_{t \in [0,1]} |x_n(t)| \\ &= \sup_{t \in [0,1]} |t^n| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f(x_n)(t) &= x_n'(t) \\ &= D_t(t^n) \\ &= n\ t^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x'_n\| &= \sup_{t \in [0,1]} |x'_n(t)| \\ &= \sup_{t \in [0,1]} |n\ t^{n-1}| \\ &= n \end{aligned}$$

Así:
$$\underset{x_n \neq 0}{} \frac{\|f(x)\|}{\|x_n\|} = \frac{n}{1} = n$$

como n es arbitrario, no existe $p > 0$

tal que $\dfrac{\|f(x_n)\|}{\|x_n\|} \leqslant p$, luego f no es acotada.

Cuando el recíproco de la proposición 2.1.2 es cierto recibe el nombre del teorema del gráfico cerrado, al cual está asociado el teorema de la aplicación abierta. Veremos bajo que condiciones y alternativas estos teoremas tienen validez.

2.1.7 PROPOSICION: Sea E un e.l.t. T_2 de dimensión n sobre $\mathbb{K}$. Entonces E es homeomorfo a $\mathbb{K}^n$ [11] (teorema VIII-8 y corolario VIII-9).

2.1.8 COROLARIO: Sean E y F dos e.l.t. T_2 de dimensión n. Entonces E y F son homeomorfos.

PRUEBA:

Por 2.1.7 E y F son homeomorfos a $\mathbb{K}^n$, por lo tanto ellos son homeomorfos entre sí.

2.1.9 COROLARIO: Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.t. T_2, todo sub-espacio H de dimensión finita, es cerrado.

PRUEBA:

Sea H de dimensión n. Entonces H es homeomorfo a $\mathbb{K}^n$, el cual es completo y por tanto H es completo $\Longrightarrow$ H es cerrado en E.

2.1.10 LEMA: Sean E, F y G tres e.l.t., sea

$f : E \longrightarrow F$ lineal y sobre

$g : F \longrightarrow G$ lineal.

Sea $h = g \circ f$ la aplicación lineal de E en G.

Si f es continua y abierta. Entonces:

a. g es continua $\Longleftrightarrow$ h es continua

b. g es abierta $\Longleftrightarrow$ h es abierta

c. g es sobre $\Longleftrightarrow$ h es sobre

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & & F \arrow[dl, "g"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Gráfica 2.1

<u>PRUEBA</u>:

a. g continua $\Longrightarrow$ h continua, por ser la compues- de dos continuas.

Recíprocamente, sea h continua y $\Theta \in \tau_G$, entonces $h^{-1}(\Theta) \in \tau_E$. f abierta $\Longrightarrow$ $f(h^{-1}(\Theta) \in \tau_F$

pero $f(h^{-1}(\Theta)) = g^{-1}(\Theta) \Longrightarrow$ g continua.

b. g abierta $\Longrightarrow$ h abierta, por ser la compuesta de dos abiertas.

Recíprocamente, sea h abierta y $\Theta \in \tau_F$

f continua $\Longrightarrow$ $f^{-1}(\Theta) \in \tau_E$

luego $h(f^{-1}(\Theta)) \in \tau_G$

pero $h(f^{-1}(\Theta)) = g(\Theta) \Longrightarrow$ g abierta

c. Si g es sobre $\Longrightarrow$ h sobre, por ser la compuesta de dos aplicaciones sobre.

Recíprocamente, sea h sobre y $z \in G$ entonces $\exists\, x \in E$, tal que $h(x) = z$, es decir $z = g \circ f(x) = g(y)$ con $y = f(x) \in F$.

2.1.11 TEOREMA DE LA APLICACION ABIERTA Y DEL GRAFICO CERRADO: Sean E y F dos e.l.t. T_2, F de dimensión finita n. Entonces:

a. Toda aplicación lineal y continua f de E sobre F es abierta.

b. Toda aplicación lineal g de F en E es continua.

PRUEBA:

a. Como f es continua y $\{0\}$ es cerrado en F

$\Longrightarrow$ $M = f^{-1}(0)$ es cerrado en E.

$\Longrightarrow$ el espacio cociente $({}^{E}/_{M}, \mathcal{T}_c)$ es un e.l.t. T_2

Sea $\varphi : E \longrightarrow {}^{E}/_{M}$ la suryección canónica

$\Longrightarrow$ φ es lineal, sobre, continua y abierta.

Como $M = \text{Ker } f \Longrightarrow \exists f_1 : {}^{E}/_{M} \longrightarrow F$ lineal e inyectiva tal que $f = f_1 \circ \varphi$ [8] (Teorema 1.2. Página 16)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \\ {}^{E}/_{M} \arrow[ur, dashed, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

Gráfica 2.2

$\text{Ker } \varphi = \ker f = M \Longrightarrow \dim(\text{Im } \varphi) = \dim(\text{Im} f)$. Es decir, ${}^{E}/_{M}$ y F son dos e.l.t. T_2 de dimensión n. Por 2.1.8 ${}^{E}/_{M}$ y F son homeomorfos,

$\Longrightarrow$ f_1 es abierta. Por 2.1.10 b, f es abierta

b. Como $\dim(F) = n$, por 2.1.7 F es homeomorfo a $\mathbb{K}^n$;

$\Longrightarrow \exists \varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow F$, tal que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base en F, entonces

$$\varphi(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Sea $g : F \longrightarrow E$ una aplicación lineal

$$\Longrightarrow \quad g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

$\Longrightarrow$ $f = g \circ \varphi$ es una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en E, tal que $\forall$ nupla $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

$$f(\lambda_1,\dots\lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

$\Longrightarrow$ f es continua. Por 2.1.10. a, g es continua.

Observemos que el teorema del gráfico cerrado se cumple en 2.1.11. b.

2.2 ESPACIOS DE BANACH

En esta sección obtendremos el teorema del gráfico cerrado para espacios de Banach, como una consecuencia de las proposiciones a seguir.

2.2.1 LEMA: Sea $(U_n)_{n \geq 1}$, un sistema fundamental numerable de vecindades del cero en un e.l.t. E metrizable.

Sea F un e.l.t. T_2. Si $f : E \longrightarrow F$ es lineal, continua y casi-abierta de E en F, entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(U_n)} = \{0\}$$

PRUEBA:

$(U_n)_{n\geq 1}$ se puede suponer decreciente, es decir

$U_{n+1} \subseteq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

f casi-abierta $\Longrightarrow \overline{f(U_n)} \in \mathcal{V}(0, \tau_F), \quad \forall n \geq 1$

$\Longrightarrow \{0\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(U_n)}$

Por otro lado:

$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(U_n)} \Longrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$, V cerrada y equilibrada.

$$(y + V) \cap f(U_n) \neq \emptyset \qquad \forall n \geq 1$$

Para cada n, sea $x_n \in U_n$ tal que $f(x_n) \in y + V$

$\Longrightarrow \quad f(x_n) - y \in V \quad \forall\, n \geq 1.$

Como $(U_n)_{n\geq 1}$ es decreciente $\Longrightarrow x_n \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$ como f es continua y lineal

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0) = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - y) \in \overline{V} = V$$

$$\Longrightarrow 0 - y \in V \Longrightarrow y \in V$$

Por la arbitrariedad de V

$$y \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}(0, \tau_F)} V = \{0\} \Longrightarrow y = 0, \text{ V cerrado}$$

$$\Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(U_n)} = \{0\}$$

2.2.2 TEOREMA DE LA APLICACION ABIERTA: Sea E un F-espacio y F un e.l.t. T_2. Si f es una aplicación lineal, continua y casi-abierta de E en F, entonces f es abierta.

PRUEBA:

Sea $(U_n)_{n\geq 1}$, una sucesión decreciente de un sistema fundamental de vecindades cerradas y equilibradas del cero en E; tal que $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n \quad \forall n \geq 1$

f casi-abierta $\Longrightarrow W_n = \overline{f(U_n)} \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F)$, $\forall n \geq 1$

Para probar que f es abierta, basta probar que $\forall n \geq 1$, $f(U_n) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F)$; para esto mostraremos que $\forall k \geq 1$ $W_{k+1} \subseteq f(U_k)$.

Para $k \geq 1$, sea $y \in W_{k+1} = \overline{f(U_{k+1})}$

$\Longrightarrow \forall W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F), (y + W) \cap f(U_{k+1}) \neq \emptyset$. En particular $W_{k+2} \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F) \Longrightarrow (y+W_{k+2}) \cap f(U_{k+1}) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists y_1 \in f(U_{k+1})$, con pre-imagen $x_1 \in U_{k+1}$ tal que $y_1 \in y + W_{k+2}$

$\Longrightarrow y - y_1 \in W_{k+2} = \overline{f(U_{k+2})}$

Procediendo inductivamente

$$\forall n \geq 1, \text{ si } y - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \in W_{k+n} = \overline{f(U_{k+n})}$$

para W_{k+n+1} es

$$\left(\left(y - \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) + W_{k+n+1}\right) \cap f(U_{k+n}) \neq \emptyset$$

$\Longrightarrow \exists\, y_n \in f(U_{k+n})$ con pre-imagen $x_n \in U_{k+n}$

tal que $y_n \in (y - \sum_{i=1}^{n-1} y_i) + W_{k+n+1}$

$\Longrightarrow \quad (y - \sum_{i=1}^{n} y_i) \in W_{k+n+1}$. Luego en general

$\Longrightarrow \quad (y - \sum_{i=1}^{n+p} y_i) \in W_{k+n+p+1} \subseteq W_{k+n+1} \quad \forall p \geqslant 0$

pues $U_{k+n+p+1} \subseteq U_{k+n+1}$

$\Longrightarrow \quad (y - \sum_{i=1}^{m} y_i) \in W_{k+n+1} \quad \forall m \geqslant n \geqslant 1$

$$\Longrightarrow \forall n \geqslant 1 \quad (y - \sum_{i=1}^{\infty} y_i) \in W_{k+n+1} \qquad (1)$$

Por otro lado, $\forall\, n \geqslant 1$ tenemos que

$U_{k+n} \supseteq U_{k+n+1} + U_{k+n+1} \supseteq U_{k+n+1} + U_{k+n+2} + U_{k+n+2} + \ldots$

$\supseteq U_{k+n+1} + U_{k+n+2} + \ldots + U_{k+n+p}\,, \quad \forall p \geqslant 0$

es decir $\sum_{i=1}^{p} U_{k+n+i} \subseteq U_{k+n}\,, \quad \forall\, p \geqslant 0$

también $x_n \in U_{k+n} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} x_{n+i} \in \sum_{i=1}^{p} U_{k+n+i}\,, \ \forall p \geqslant 0$

$\Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{p} x_{n+i} = x_n + \sum_{i=1}^{p} x_{n+i} \in U_{k+n} + \sum_{i=1}^{p} U_{k+n+i}$

$$\Longrightarrow \forall n \geqslant 1 \text{ y } \forall p \geqslant 0 \quad \sum_{i=0}^{p} x_{n+i} \in U_{k+n} + U_{k+n} \subseteq U_{k+n-1} \quad (2)$$

Ahora bien, como $(U_n)_{n \geqslant 1}$ es un sistema fundamental decreciente de vecindades del cero.

$\Longrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E)$, $\exists\, n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_o$

$$U_{k+n-1} \subseteq V$$

$\Longrightarrow \sum_{i=0}^{p} x_{n+1} \in V, \quad \forall n \geq n_o$ y $\forall\, p \geq 0$

$\Longrightarrow (S_n)_{n\geq 1}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

es una sucesión de Cauchy. Como E es completo, $\exists\, x \in E$

tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$, por (2), para n = 1 tenemos que

$$\sum_{i=0}^{p} x_{1+i} \in U_k \qquad \forall p \geq 0$$

U_k cerrado $\Longrightarrow \lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{p} x_i = x \in U_k \Longrightarrow f(x) \in f(U_k)$

Por la continuidad y linealidad de f, tenemos que:

$$f(x) = f(\lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{p} x_i) = \lim_{p\to\infty} (f(\sum_{i=1}^{p} x_i))$$

$$= \lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{p} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

Por (1) $y - f(x) = (y - \sum_{i=1}^{\infty} y_i) \in W_{k+n+1}, \quad \forall n \geq 1$

$\Longrightarrow (y - f(x)) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{k+n+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(U_{k+n+1})}$

Por el lema 2.2.1 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(U_{k+n+1})} = \{0\}$

$\Longrightarrow y - f(x) = 0 \Longrightarrow y = f(x)$, luego

$\forall y \in W_{k+1} \Longrightarrow y \in f(U_k) \Longrightarrow W_{k+1} \subsetneq f(U_k), \quad \forall k \geq 1$

$\Longrightarrow$ f es abierta.

El siguiente lema lo necesitamos para el teorema del gráfico cerrado.

2.2.3 LEMA: Sea F un e.l.t. y E un e.l.t. metrizable con un sistema fundamental numerable $(V_n)_{n\geq 1}$ de vecindades del cero. Sea g una aplicación lineal inyectiva y casi-continua de F en E.

Si el gráfico G de g es cerrado, entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{g^{-1}(V_n)} = \{0\}$$

PRUEBA:

g casi-continua $\Longrightarrow \overline{g^{-1}(V_n)} \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F), \quad \forall n \geq 1$

$\Longrightarrow 0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{g^{-1}(V_n)}$

Por otro lado, sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{g^{-1}(V_n)}$

$\Longrightarrow x \in \overline{g^{-1}(V_n)}, \quad \forall n \geq 1$

$\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F), \; (x+U) \cap g^{-1}(V_n) \neq \emptyset \quad \forall n \geq 1$

$\Longrightarrow \forall n \geq 1, \quad \exists x_n = g^{-1}(y_n)$ con $y_n \in V_n$, tal que:

$x_n \in x + U$. Por hipótesis,

$\forall V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E), \; \exists m \geq 1$ tal que $V_m \subseteq V$

$\Longrightarrow \exists x_m = g^{-1}(y_m), \; y_m \in V_m$ tal que

$x_m \in x + U$ y $g(x_m) = y_m \in V_m \subseteq V$

$\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F)$ y $\forall V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E) \; \exists m \geq 1$

tal que $(x_m, g(x_m)) \in [(x + U) \times V] \cap G$

$\Longrightarrow$ Toda vecindad $(x + U) \times V$ del punto $(x,0)$ en $F \times E$ corta el gráfico G de g.

$\Longrightarrow$ $(x,0) \in \overline{G} = G \Longrightarrow g(x) = 0$

Como g es inyectiva y lineal $\Longrightarrow x = 0$

$\Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{g^{-1}(V_n)} = \{0\}$

El teorema del gráfico cerrado para e.l.t., siendo el de llegada un F-espacio, no le pide a la aplicación lineal que sea inyectiva, sin embargo en la siguiente proposición si se pide, la cual nos ayudará a probar el teorema del gráfico cerrado.

2.2.4 <u>PROPOSICION</u>: Sea F un e.l.t. y E un F-espacio. Sea g una aplicación lineal e inyectiva de F en E cuyo gráfico G es cerrado; si g es casi-continua, entonces g es continua.

<u>PRUEBA</u>:

Como E es un F-espacio, es metrizable. Sea $(V_n)_{n \geqslant 1}$, un sistema fundamental decreciente de vecindades cerradas y equilibradas del cero, tal que $\forall\, n \geqslant 1$ es $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$.

Como g es casi-continua $\Longrightarrow \forall k \geqslant 1\ U_k = \overline{g^{-1}(V_k)} \in \mathcal{V}(0,\tau_F)$

Para demostrar que g es casi-continua, basta probar que $\forall k \geqslant 1$, $g^{-1}(V_k) \in \mathcal{V}(0,\tau_F)$; lo cual es cierto si $\forall k \geqslant 1$ es $U_{k+1} \subseteq g^{-1}(V_k)$, o bien si $g(U_{k+1}) \subseteq V_k$.

Sea pues $y \in g(U_{k+1}) \Longrightarrow \exists x \in U_{k+1} = \overline{g^{-1}(V_{k+1})}$

tal que $g(x) = y$

$\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F)$, $(x + U) \cap g^{-1}(V_{k+1}) \neq \emptyset$

para $U = U_{k+2} \Longrightarrow (x + U_{k+2}) \cap g^{-1}(V_{k+1}) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists x_1 = g^{-1}(y_1)$ con $y_1 \in V_{k+1}$ tal que $x_1 \in x + U_{k+2}$

$\Longrightarrow x - x_1 \in U_{k+2} = \overline{g^{-1}(V_{k+2})}$

Procediendo inductivamente:

$\forall n \geq 1$, si $x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \in U_{k+n} = \overline{g^{-1}(V_{k+n})}$

$$\Longrightarrow \left(\left(x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + U_{k+n+1}\right) \cap g^{-1}(V_{k+n}) \neq \emptyset$$

$\Longrightarrow \exists x_n = g^{-1}(y_n)$, $y_n \in V_{k+n}$ tal que

$$x_n \in \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + U_{k+n+1}$$

$$\Longrightarrow \left(x - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \in U_{k+n+1}$$

$$\Longrightarrow \left(x - \sum_{i=1}^{n+p} x_i\right) \in U_{k+n+p+1} \subseteq U_{k+n+1} \quad \forall p \geq 0$$

pues $(V_n)_{n \geq 1}$ es decreciente. Como U_{k+n+1} es cerrado

$$\Longrightarrow \lim_{p \to \infty} \left(x - \sum_{i=1}^{n+p} x_i\right) = \left(x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) \in U_{k+n+1} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Longrightarrow \left(x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{k+n+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{g^{-1}(V_{k+n+1})}$$

por 2.2.3 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{g^{-1}(V_{k+n+1})} = \{0\}$

$\Longrightarrow x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 0 \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$

Ahora, como $\forall n \geqslant 1$ es $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$

$\Longrightarrow V_{k+n-1} \supseteq V_{k+n} + V_{k+n+1} + V_{k+n+2} + \ldots + V_{k+n+p}$

$\Longrightarrow V_{k+n-1} \supset \sum_{i=0}^{p} V_{k+n+i} \quad \forall p \geqslant 0$

$\Longrightarrow V_{k+n-1} \supset \sum_{i=1}^{m} V_{k+1} \quad \forall m \geqslant n \geqslant 1$

Sea $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$, como $(V_n)_{n \geqslant 1}$ es un sistema fundamental decreciente de vecindades del cero en E, entonces:

$\forall V \; \exists n_0 \;/\; \forall n \geqslant n_0$ es $V_{k+n-1} \subseteq V$

$\Longrightarrow \forall m \geqslant n \geqslant n_0$ es $\sum_{i=n}^{m} y_i \in \sum_{i=n}^{m} V_{k+1} \subseteq V_{k+n-1} \subseteq V$

$\Longrightarrow$ la sucesión $(S_n)_{n \geqslant 1}$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$

(sucesión de sumas parciales de la serie $S = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$)

es una sucesión de Cauchy en E. Como E es completo

$\Longrightarrow \exists y' \in E$ tal que $y' = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)$, como $\forall m \geqslant n$

es $\sum_{i=n}^{m} y_i \in V_{k+n-1}$, para $n = 1$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} y_i \in V_k, \quad \forall m \geq 1 \Longrightarrow y' = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} y_i \in \overline{V_k} = V_k$$

Como $\forall n$ es $(x - \sum_{i=1}^{n} x_i) \in F \Longrightarrow$

$$(x - \sum_{i=1}^{n} x_i, g(x) - \sum_{i=1}^{n} g(x_i)) \in G$$

$$\Longrightarrow (x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i, \ g(x) - \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)) \in \overline{G} = G$$

$\Longrightarrow (0, \ g(x) - y') \in G$

g inyectiva $\Longrightarrow g(x) - y' = g(0) = 0$

$\Longrightarrow y = g(x) = y' \in V_k$

$\Longrightarrow g(U_{k+1}) \subseteq V_k, \quad \forall k \geq 1$

$\Longrightarrow$ g es continua.

Para eliminar la inyectividad necesitamos otras propiedades que veremos a continuación.

2.2.5 LEMA: Sean F y E dos e.l.t. y sea $g : F \longrightarrow E$ lineal, cuyo gráfico es cerrado. Entonces $g^{-1}(0)$ es un sub-espacio (abreviadamente s.e.) cerrado de F.

PRUEBA:

Sea $H = \{ x \in F \ / \ g(x) = 0 \}$; y sea $x \in \overline{H}$

$\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F)$ es $(x + U) \cap H \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists x_1 \in H \ / \ x_1 \in x + U$ y $g(x_1) = 0$

$\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F)$ y $\forall V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$, resulta

$[(x + U) \times V] \cap G \neq \emptyset \Longrightarrow (x, 0) \in \overline{G} = G$

Por lo tanto $g(x) = 0, \Longrightarrow x \in H$. Luego H es un s.e.

cerrado de F.

2.2.6 LEMA: Sean F y E dos e.l.t. y g una aplicación lineal de F en E, tal que $g^{-1}(0)$ es un s.e. cerrado de F.

Sean: $\varphi : F \longrightarrow F/_{g^{-1}(0)}$ la suryección canonica y $g_1 : F/g^{-1}(0) \longrightarrow E$ la aplicación lineal inyectiva asociada a g; es decir tal que $g = g_1 \circ \varphi$. Entonces:

a. g es casi-abierta $\Longleftrightarrow$ g_1 es casi abierta

b. g casi-continua $\Longrightarrow$ g_1 es casi-continua

PRUEBA:

a. Supongamos que g es casi-abierta. Sea $\bar{U} \in V(0, \mathcal{T}_c)$ $\Longrightarrow \exists U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$ tal que $\bar{U} = \varphi(U)$. Ahora:

$$g_1(\bar{U}) = g_1 \circ \varphi(U) = g(U)$$

$\Longrightarrow \overline{g_1(\bar{U})} = \overline{g(U)} \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$, pues g es casi-abierta $\Longrightarrow g_1$ es casi-abierta.

Recíprocamente:

Sea $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E) \Longrightarrow g(U) = g_1(\varphi(U))$

φ abierta $\Longrightarrow \varphi(U) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_c)$.

g_1 casi-abierta $\Longrightarrow \overline{g_1(\varphi(U))} \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$

es decir $\overline{g(U)} \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$

Por lo tanto g es casi-abierta.

b. Sea $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$

g casi-continua $\Longrightarrow \overline{g^{-1}(V)} \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F)$

φ abierta $\Longrightarrow \varphi(\overline{g^{-1}(V)}) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_c)$

φ continua $\Longrightarrow$ $\varphi(\overline{g^{-1}(V)}) \subseteq \overline{\varphi(g^{-1}(V))}$

luego . $\overline{\varphi(g^{-1}(V))} \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_c)$

Pero $\varphi(g^{-1}(V)) = \varphi(\varphi^{-1} \circ g_1^{-1}(V)) = g_1^{-1}(V)$

$\Longrightarrow \overline{g_1^{-1}(V)} = \overline{\varphi(g^{-1}(V))} \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_c)$

por tanto g_1 es casi-continua

2.2.7 <u>PROPOSICION</u>: Sean F y E dos e.l.t. $\in T_2$

$g : F \longrightarrow E$ lineal, Sea $\varphi : F \longrightarrow F/_{g^{-1}(0)}$

la suryección canónica y $g_1 : F/_{g^{-1}(0)} \longrightarrow E$ tal que

$g = g_1 \circ \varphi$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

a. El gráfico G de g es cerrado

b. El gráfico G_1 de g_1 es cerrado

<u>PRUEBA</u>

(b)$\Longrightarrow$(a) Como φ es continua y g_1 tiene el gráfico cerrado, entonces por 2.1.5 $g = g_1 \circ \varphi$ tiene el gráfico cerrado.

(a)$\Longrightarrow$(b) Sean

$$G = \left\{ (x, g(x)) \;/\; x \in F \right\}$$

$$G_1 = \left\{ (\bar{x}, g_1(\bar{x})) \;/\; \bar{x} \in F/g^{-1}(0) \right\}$$

Sea $(\bar{x}, y) \in \overline{G}_1 \Longrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F)$ y

$\forall V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E)$ tenemos que $\varphi(U) = \overline{U}$, y

$(\bar{x} + \overline{U}) \times (y + V) \cap G_1 \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists (\bar{z}, g_1(\bar{z})) \in G_1$

tal que $\bar{z} \in \bar{x} + \overline{U}$ y $g_1(\bar{z}) \in y + V$

$\Longleftrightarrow g_1(\bar{x} + \overline{U}) \cap (y + V) \neq \emptyset$

$\Longleftrightarrow g_1 \circ \varphi(x + U) \cap (y + V) \neq \emptyset$

como $g_1 \circ \varphi = g$, tenemos que

$\Longleftrightarrow g(x + U) \cap (y + V) \neq \emptyset$

$\Longleftrightarrow \exists z \in x + U$ tal que $g(z) \in y + V$

$\Longleftrightarrow (x + U) \times (y + V) \cap G \neq \emptyset$

y esto es cierto $\forall U \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$ $\forall V \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$; luego

$(x, y) \in \bar{G} = G \Longrightarrow g(x) = y$

pero $g(x) = g_1 \circ \varphi(x)$

$= g_1(\bar{x})$

luego:

$g_1(\bar{x}) = y \Longrightarrow (\bar{x}, y) \in G_1$. Es decir G_1 es cerrado.

Ahora, eliminamos la inyectividad en la proposición 2.2.4 y obtenemos:

2.2.8 TEOREMA DEL GRAFICO CERRADO. Sea F un e.l.t. y E un F-espacio. Sea $g : F \longrightarrow E$ una aplicación lineal con el gráfico G cerrado.

Si g es casi-continua, entonces g es continua.

PRUEBA:

Como el gráfico de g es cerrado, entonces por 2.2.5 $g^{-1}(0)$ es cerrado, luego $F/g^{-1}(0)$ es un e.l.t. T_2.

Sea g_1 la aplicación lineal inyectiva asociada a g tal que $g = g_1 \circ \varphi$.

Por 2.2.7 el gráfico de g_1 es cerrado y por 2.2.6.b g_1 es casi-continua.

Así, se cumplen las hipótesis de la proposición 2.2.4 para g_1; y por tanto g_1 es continua, por 2.1.10.a g es continua.

Si en 2.2.2 (T de la Aplicación Abierta) y en 2.2.8 (T, del gráfico cerrado) los espacios son l.c.; la prueba sigue siendo válida. Tenemos así:

2.2.9 <u>COROLARIO</u>: Sea E un Frechet y F un e.l.c. T_2. Entonces:

a. Si f es una aplicación lineal, continua y casi-abierta de E en F, entonces f es abierta.

b. Si g es una aplicación lineal, con el gráfico cerrado y casi-continua de F en E, entonces g es continua.

El siguiente lema, lo utilizaremos en varias ocasiones.

2.2.10 <u>LEMA</u>: Sea E un e.l.c. y F un e.l.t. Tonelado. Entonces:

a. Una aplicación lineal f de E sobre F es casi-abierta.

b. Una aplicación lineal g de F en E es casi-continua.

<u>PRUEBA</u>:

a. Como E es un e.l.c. entonces el filtro de vecindades del cero, tiene una base de toneles. Sea $f : E \longrightarrow F$ lineal y sobre. Sea $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$ un tonel. Como f es lineal, $\Longrightarrow$ f(V) es un disco absorbente; $\Longrightarrow \overline{f(V)}$ es un disco absorbente y cerrado; es decir $\overline{f(V)}$ es un tonel y como F es tonelado entonces $\overline{f(V)} \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$ $\Longrightarrow$ f es casi-abierta.

b. Sea $g : F \longrightarrow E$ lineal como E tiene una base de toneles. Sea $V \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$, un tonel g lineal $\Longrightarrow$ $g^{-1}(V)$ es un disco absorbente; $\Longrightarrow$ $\overline{g^{-1}(V)}$ es un disco absorbente y cerrado; es decir $\overline{g^{-1}(V)}$ es un tonel en F.

F tonelado $\Longrightarrow$ $\overline{g^{-1}(V)} \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$ $\Longrightarrow$ g es casi-continua.

2.2.11 PROPOSICION: Sea E un Frechet, y F un e.l.c. Tonelado T_2. Entonces:

a. Toda aplicación lineal y continua f de E sobre F es abierta.

b. Toda aplicación lineal g de F en E con el gráfico cerrado es continua.

PRUEBA:

a. Por 2.2.10.a f es casi-abierta. Luego por el teorema de la aplicación abierta 2.2.2 f es abierta.

b. Por 2.2.10.b, g es casi-continua. Luego por el teorema del gráfico cerrado 2.2.8 g es continua.

2.2.12 COROLARIO: Sea (E, τ) un Frechet y (E, τ') un e.l.c tonelado T_2 tal que $\tau' \leq \tau$. Entonces $\tau = \tau'$

PRUEBA:

Sea $i_E : E_{\tau} \longrightarrow E_{\tau'}$, entonces i_E es lineal y continua pues $\tau' \leq \tau$. Entonces por 2.2.11.a. i_E es abierta, es decir $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'$. Luego $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

En el siguiente teorema, eliminamos la continuidad de la aplicación f en el teorema de la Aplicación Abierta y a cambio pedimos que sea sobre y con el gráfico cerrado.

2.2.13 <u>TEOREMA DE LA APLICACION ABIERTA</u> (PARA APLICACIONES SOBRE): Sea E un F-espacio y F un e.l.t. T_2. Sea f una aplicación lineal de E sobre F con el gráfico cerrado. Si f es casi-abierta, entonces f es abierta.

<u>PRUEBA</u>:

Como el gráfico de f es cerrado, entonces $f^{-1}(0)$ es cerrado en E, luego $E' = E/f^{-1}(0)$ es un F-espacio [1] (teorema 2.9.2 Página 138); Sea f_1 la aplicación inyectiva asociada a f (es decir $f = f_1 \circ \varphi$, donde φ es la suryección canónica de E sobre $E/f^{-1}(0)$); Por 2.2.6.a f_1 es casi-abierta, y por 2.2.7 , el gráfico de f_1 es cerrado; además por 2.1.10.c f_1 es sobre. Luego existe la inversa g_1 de f_1

$$g_1 : F \longrightarrow E'$$

g_1 es lineal y por 2.1.3 el gráfico de g_1 es cerrado; como f_1 es casi-abierta $\Longrightarrow$ g_1 es casi-continua. Por 2.2.8 (T. del Gráfico Cerrado) g_1 es continua; es decir f_1 es abierta. Luego por 2.1.10.b, f es abierta. Por el hecho de que aplicaciones continuas tienen el gráfico cerrado, el teorema 2.2.13 es más general que 2.2.2 (Teorema de la aplicación abierta). Es más, si en 2.2.2 f es sobre entonces 2.2.2 es consecuencia de 2.2.8 (El teorema del gráfico cerrado). En efecto pues $f^{-1}(0)$ cerrado en $E \Longrightarrow E' = E/_{f^{-1}(0)}$ es un F-espacio y f_1 de E' sobre F es lineal inyectiva casi-abierta y con el gráfico cerrado. Luego $\exists g_1 : F \longrightarrow E'$ lineal, casi-continua y con el gráfico cerrado. Por 2.2.8 g_1 es continua $\Longrightarrow f_1$ es abierta; por 2.1.10.b f es abierta.

2.2.14 <u>COROLARIO</u>: Sea E un Frechet y F un tonelado T_2. Sea $f : E \longrightarrow F$ lineal, sobre y con el gráfico cerrado. Entonces f es abierta.

<u>PRUEBA</u>:

Por 2.2.10.a f es casi-abierta. Luego por 2.2.13 f es abierta.

Para los teoremas de la aplicación abierta y el gráfico cerrado para espacios Baire necesitamos la siguiente proposición.

2.2.15 <u>PROPOSICION</u>: Sean E y F dos e.l.t. y F Baire. Entonces:

a. Toda aplicación lineal f de E sobre F es casi-abierta.

b. Toda aplicación lineal g de F en E es casi-continua.

PRUEBA:

a. Sea $U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E)$; existe $V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E)$, V equilibrada tal que $V + V \subseteq U$. Como V es absorbente $E = \bigcup_{n\geq 1} nV$; y como f es sobre $F = f(E) = f(\bigcup_{n\geq 1} nV) = \bigcup_{n\geq 1} f(nV) = \bigcup_{n\geq 1} nf(V)$

$\Longrightarrow$ $F = \bigcup_{n\geq 1} nf(V)$. Como F es Baire existe $n \geq 1$ tal que $\overset{i}{\overline{nf(V)}} \neq \emptyset \Longrightarrow \overset{i}{\overline{f(V)}} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists y \in \overset{i}{\overline{f(V)}}$

$\Longrightarrow$ existe una vecindad abierta de y, V_y en F tal que $y \in V_y \subset \overline{f(V)}$; luego

$0 = y - y \in V_y - V_y \subseteq \overline{f(V)} + \overline{f(V)} = \overline{f(V) + f(V)}$

$\Longrightarrow 0 \in \overline{f(V) + f(V)} \subset \overline{f(V + V)} \subset \overline{f(U)}$

Como $(V_y - V_y) \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F)$, $\Longrightarrow \overline{f(U)} \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F)$

$\Longrightarrow$ f es casi-abierta.

b. Sea $U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E)$. Existe $V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E)$, V equilibrada tal que $V + V \subseteq U$. Como V es absorbente.

$E = \bigcup_{n\geq 1} nV$ y $F = g^{-1}(E) = g^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} nV)$

$\Longrightarrow F = \bigcup_{n\geq 1} g^{-1}(nV) = \bigcup_{n\geq 1} ng^{-1}(V)$

F Baire $\Longrightarrow \exists n \geq 1$ tal que $\overset{i}{\overline{ng^{-1}(V)}} \neq \emptyset$

es decir $\overset{i}{\overline{g^{-1}(V)}} \neq \emptyset$, luego existe $x \in \overset{i}{\overline{g^{-1}(V)}}$; o sea que existe $V_x \in \mathcal{V}(x,\mathcal{T}_F)$, V_x abierta tal que:

$x \in V_x \subset \overline{g^{-1}(V)} \Longrightarrow 0 = x - x \in V_x - V_x \subset \overline{g^{-1}(V)} + \overline{g^{-1}(V)} = \overline{g^{-1}(V) + g^{-1}(V)}$

$\Longrightarrow 0 \in V_x - V_x \subset \overline{g^{-1}(V + V)} \subset \overline{g^{-1}(U)}$

como $V_x - V_x \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F) \Longrightarrow \overline{g^{-1}(U)} \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F)$, $\Longrightarrow$ g es casi-continua.

2.2.16 <u>COROLARIO</u>: Si E y F son dos e.l.t. f una aplicación lineal de E en F tal que f(E) es de 2a. categoría (Baire), en F, entonces f es casi-abierta.

<u>PRUEBA</u>:

Inmediata, a partir de que para la $V \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$ equilibrada, dada en 2.2.15.a es $\bigcup_{n \geq 1} \overline{nf(V)} \supset f(E)$. El resto de la demostración es análoga.

2.2.17 <u>PROPOSICION</u>: Sea E un F-espacio y F un e.l.t. Baire y T_2, entonces:

a. Toda aplicación lineal y continua f de E sobre F es abierta.

b. Toda aplicación lineal g con el gráfico cerrado de F en E es continua.

<u>PRUEBA</u>:

a. Por 2.2.15.a f es casi-abierta; y por el teorema de la Aplicación Abierta 2.2.2, f es abierta.

b. Por 2.2.15.b g es casi-continua, y por el teorema del gráfico cerrado 2.2.8 g es continua.

2.2.18 <u>COROLARIO</u>: Sean E y F dos F-espacios, entonces:

a. Toda aplicación lineal y continua f de E sobre F es abierta.

b. Toda aplicación lineal g con el gráfico cerrado de F en E es continua.

PRUEBA:

Todo F-espacio es Baire y es T_2. Luego 2.2.18 es un caso particular de 2.2.17.

2.2.19 COROLARIO: Sea E un F-espacio y F un e.l.t. T_2. Sea $f : E \longrightarrow F$ lineal y continua, tal que $f(E)$ es de 2a. categoría (Baire) en F; entonces f es abierta, y sobre.

PRUEBA:

Por 2.2.16 f es casi-abierta, por el teorema de la Aplicación Abierta 2.2.2, f es abierta, Ahora bien, sea $U \in \mathcal{V}(0,\tau_E)$ una vecindad abierta de 0, entonces $f(U) \in \mathcal{V}(0,\tau_F)$ es una vecindad abierta y por lo tanto absorbente; luego;

$$F = \bigcup_{n\geq 1} nf(U) = \bigcup_{n\geq 1} f(nU) = f(\bigcup_{n\geq 1} nU)$$

$F = f(E)$. Luego f es sobre

2.2.20 COROLARIO: Sea E un F-espacio y F un e.l.t. T_2. Sea $f : E \longrightarrow F$ lineal y continua. Entonces ó $f(E)$ es de 1a.categoría en F ó $f(E) = F$

PRUEBA:

Supongamos que $f(E)$ no es de 1a. categoría en F, entonces $f(E)$ es de 2a. categoría en F; por 2.2.19 f es abierta y sobre, es decir $f(E) = F$.

2.2.21 COROLARIO: Sean E y F dos F-espacios. Entonces toda aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ continua y biyectiva es un homeomorfismo.

PRUEBA:

Por 2.2.18.a f es abierta, como f es biyectiva f^{-1} existe y es continua. Luego f es un homeomorfismo.

2.2.22 COROLARIO: Sean τ y τ' dos topologías sobre E. Tales que (E,τ) y (E,τ'), sean F-espacios, entonces:

Si $\tau' \leqslant \tau$ ó $\tau \leqslant \tau'$ entonces $\tau = \tau'$.

PRUEBA:

Supongamos $\tau' \leqslant \tau$. Sea $i_E : E_\tau \longrightarrow E_{\tau'}$, la identidad en E, entonces i_E es lineal biyectiva y continua; luego por 2.2.18.a i_E es un homeomorfismo es decir $\tau = \tau'$.

Por último el teorema de la Aplicación Abierta y el Gráfico Cerrado para espacios de Banach.

2.2.23 TEOREMA (Banach). Sean E y F dos espacios de Banach, entonces:

a. Si $f : E \longrightarrow F$ es lineal, continua y sobre entonces f es abierta.

b. Si $f : E \longrightarrow F$ es lineal y con el gráfico cerrado entonces f es continua.

PRUEBA:

Inmediata a partir de 2.2.18.

CAPITULO 3

TEOREMAS DE LA APLICACION ABIERTA Y DEL GRAFICO CERRADO PARA ESPACIOS LIMITE INDUCTIVO

3.1 LIMITES INDUCTIVOS

3.1.1 <u>DEFINICION:</u> **a.** Sea $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de espacios l.c. y E un espacio vectorial. Para cada $\alpha\in I$, sea

$f_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$ una aplicación lineal

Supongamos que $E = \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(E_\alpha)$. Sea $\mathcal{T}$ la topología l.c. más fina sobre E, tal que para cada $\alpha\in I$, f_α es continua. Llamaremos Límite Inductivo de $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ a E provisto de la topología $\mathcal{T}$ (topología final)

b. Un sistema fundamental de vecindades para el cero en $(E,\mathcal{T})$, lo determinamos así:

Si U es un disco absorbente, entonces:

$$U\in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E) \Longleftrightarrow f_\alpha^{-1}(U)\in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_\alpha),\ \forall \alpha\in I$$

c. Si $I = \mathbb{N}$, entonces $(E,\mathcal{T})$ lo llamaremos el Límite inductivo estricto generalizado de $(E_n)_{n\geq 1}$.

d. Si en (c), E es la unión de una sucesión creciente de sub-espacios de E y cada f_n es la inclusión natural; entonces $\mathcal{T}$ induce sobre cada E_n una topología $\mathcal{T}_n'$ (Topología Inicial), menos fina que $\mathcal{T}_n$, es decir

$$\mathcal{T}/_{E_n} = \mathcal{T}_n' \leqslant \mathcal{T}_n$$

si $\mathcal{T}_n' = \mathcal{T}_n$. a $(E,\mathcal{T})$ lo llamaremos límite inductivo estricto de $(E_n)_{n\geq 1}$

e. Si $(E,\mathcal{T})$ es el Límite inductivo estricto de $(E_n)_{n\geq 1}$. Un sistema fundamental de vecindades del cero en $(E,\mathcal{T})$ lo determinamos así:

Si U es un disco absorbente en E, entonces:

$$U\in\mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E) \Longleftrightarrow U\cap E_n \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_n),\ \forall n\geq 1$$

3.1.2 <u>DEFINICION</u>: a. El Límite inductivo estricto (generalizado) de espacios Frechets $(E_n)_{n\geq 1}$, lo llamaremos un LF-espacio (generalizado).

b. El Límite inductivo de espacio Banach $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$, lo llamaremos un β -espacio.

En particular:

1. Todo espacio Bornológico, T_2 y casi-completo es un β-espacio [1] (Pág. 223. Proposición 3.7.5).

2. Todo Frechet es un β-espacio. Pues es bornológico por ser metrizable [1] (Pág. 222. Proposición 3.7.3), además es T_2 y casi-completo.

3. Todo LF-espacio (generalizado) es un β-espacio, pues es límite inductivo estricto (generalizado) de Frechets.

3.1.3 <u>PROPOSICION</u>: a. El Límite Inductivo estricto de espacios Hausdorff, es un espacio Hausdorff.

b. El Limite inductivo de tonelados es tonelado.

<u>PRUEBA</u>:

a. Sea E el límite inductivo estricto de $(E_n)_{n\geq 1}$.

Supongamos que E no es $T_2 \Longrightarrow \exists x \in E,\ x \neq 0$ tal que $\forall U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$, $x \in U$. Como $E = \bigcup_{n \geq 1} I_n(E_n)$. ($I_n$ es la inclusión natural de E_n en E), existe $m \geq 1$ tal que $x \in E_m$ y $x \in U \cap E_m = U_m$, $\forall U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E) \Longrightarrow E_m$ no es T_2.

b. Sea E el límite inductivo de $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ tal que $\forall \alpha \in I$, E_α es tonelado.

Sea $T \subset E$ un tonel en E. Como $\forall \alpha \in I$, f_α es lineal y continua.

$\Longrightarrow \forall \alpha \in I$ $f_\alpha^{-1}(T)$ es un tonel en E

$\Longrightarrow f_\alpha^{-1}(T) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_\alpha), \forall \alpha \in I$

$\Longrightarrow T \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E) \Longrightarrow$ E es tonelado.

Como todo LF-espacio es el Límite inductivo estricto de Frechets y un Frechet es completo, entonces todo LF-espacio es completo [1] (corolario del teorema 2.12.3. Página 162 a 164). Por lo que acabamos de decir y por 3.1.3, podemos enunciar:

3.1.4 PROPOSICION: Todo LF-espacio es T_2, tonelado y completo.

Podemos agregar por 3.1.3.b que todo β-espacio es tonelado.

3.1.5 PROPOSICION: Si $(E, \mathcal{T})$ es un LF-espacio generalizado y H es un sub-espacio cerrado de E, entonces $(E/_H, \mathcal{T}_c)$ es también un LF-espacio generalizado.

PRUEBA:

Sea E el límite inductivo estricto generalizado de la familia de Frechets $(E_n)_{n\geq 1}$; tal que $\mathcal{T}$ es la topología l.c. más fina sobre E, para la cual, $\forall_{n\geq 1}$ $f_n : E_n \longrightarrow E$ es continua. Por otro lado, sea φ la suryección canónica de E sobre $E/_H$ y $\mathcal{T}_c$ la topología l.c. más fina sobre $E/_H$ que hace a φ continua.

Tenemos que:

$$E/_H = \varphi(E) = \varphi(\bigcup_{n\geq 1} f_n(E_n)) = \bigcup_{n\geq 1} \varphi \circ f_n(E_n)$$

denotemos $\forall n\geq 1,\ \varphi\circ f_n = \varphi_n$

$\Longrightarrow$ $E/_H = \bigcup_{n\geq 1} \varphi_n(E_n)$ y $\mathcal{T}_c$ es la topología l.c. más fina sobre $E/_H$ tal que $\forall n\geq 1$ $\varphi_n : E_n \longrightarrow E/_H$ es continua $\Longrightarrow$ $(E/_H, \mathcal{T}_c)$ es un LF-espacio generalizado.

3.1.6 <u>PROPOSICION</u>: Si $(E,\mathcal{T})$ es un β-espacio, y H un sub-espacio cerrado de E, entonces $(E/_H, \mathcal{T}_c)$ es también un β-espacio.

<u>PRUEBA</u>:

Análoga a 3.1.5

3.1.7 <u>PROPOSICION</u>: Sea $(E,\mathcal{T})$ el límite inductivo de $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$. Sea F un e.l.c. y f una aplicación lineal de E en F. Entonces:

f es continua $\Longleftrightarrow$ $\forall \alpha\in I$, $f \circ f_\alpha$ es continua

<u>PRUEBA</u>:

($\Longrightarrow$) si f es continua $\Longrightarrow$ $f \circ f_\alpha$ es continua $\forall \alpha\in I$

($\Longleftarrow$). Como $\mathcal{B}=\left\{V\in\mathcal{V}(0,\tau_F)/V \text{ es un disco}\right\}$ constituye un sistema fundamental de vecindades del cero en F $\Longrightarrow \forall\alpha\in I\ (f \circ f_\alpha)^{-1}(V)\in\mathcal{V}(0,\tau_\alpha)$ $\Longrightarrow \forall\alpha\in I,\ f_\alpha^{-1}(f^{-1}(V))\in\mathcal{V}(0,\tau_\alpha)$.

Como $f^{-1}(V)$ es un disco absorbente en E, por 3.1.1.b entonces $f^{-1}(V)\in\mathcal{V}(0,\tau_E)\Longrightarrow$ f es continua.

3.2 TEOREMAS DEL GRAFICO CERRADO Y LA APLICACION ABIERTA.

3.2.1 LEMA: Sea (E,τ) un e.l.c. y H un sub-espacio de E tal que H es de 2a. categoría en E. Entonces H es tonelado en la topología inducida sobre H, y $\bar{H} = E$.

PRUEBA:

Sea T un tonel en H $\Longrightarrow H\subseteq\bigcup n\bar{T}\Longrightarrow \overset{\circ}{\bar{T}}\neq\emptyset\Longrightarrow\exists x\in\overset{\circ}{\bar{T}}$ $\Longrightarrow\exists V\in\mathcal{V}(0,\tau)$ tal que $x\in x+V\subset\bar{T}$. Como $\bar{T}$ es disco $0={}^1/_2x-{}^1/_2x\in{}^1/_2x+{}^1/_2V-{}^1/_2x-{}^1/_2V\subset{}^1/_2\bar{T}+{}^1/_2\bar{T}$ $\Longrightarrow 0\in{}^1/_2V-{}^1/_2V\subset\bar{T}$, pero $({}^1/_2V-{}^1/_2V)\in\mathcal{V}(0,\tau)\Longrightarrow\bar{T}\in\mathcal{V}(0,\tau)$, $\Longrightarrow$ $\bar{T}\cap H=T\in\mathcal{V}(0,\tau_H)\Longrightarrow$ H es tonelado.

Por otro lado: H de 2a. categoría $\Longrightarrow\overset{\circ}{\bar{H}}\neq\emptyset$ $\Longrightarrow\exists x\in\overset{\circ}{\bar{H}}\Longrightarrow\exists V\in\mathcal{V}(0,\tau)$ tal que: $x\in x+V\subset\bar{H}$ $\Longrightarrow V\subset\bar{H}-x\subset\bar{H}\Longrightarrow E=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}nV\subset\bar{H}$, pues $\bar{H}$ es un sub-espacio de E, luego $\bar{\bar{H}}=E$.

3.2.2. PROPOSICION: Sea F un LF-espacio generalizado y E un e.l.c. Baire y T_2. Entonces:

a. Toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

b. Toda aplicación lineal continua y biyectiva g de F sobre E es abierta.

PRUEBA:

a. Sea F el Límite inductivo de la familia de Frechets $(F_n)_{n\geqslant 1}$ tales que $F = \bigcup_{n\geqslant 1} f_n(F_n)$

$\Longrightarrow E = f^{-1}(F) = f^{-1}(\bigcup_{n\geqslant 1} f_n(F_n)) = \bigcup_{n\geqslant 1} f^{-1}(f_n(F_n))$

como E es Baire, existe $m \in \mathbb{N}$, para el cual $H = f^{-1}(f_m(F_m))$ es de 2a. categoría en E, pues si no, E no es Baire. Por el Lema 3.2.1; H es tonelado como sub-espacio y $\bar{H} = E$.

Como $f_m^{-1}(0)$ es cerrado en $F_m \Longrightarrow F'_m = F_m/f_m^{-1}(0)$ con la topología cociente es un Frechet, pues el espacio cociente de un Frechet es un Frechet. Sea g_m la aplicación inyectiva de F'_m en F asociada a f_m.

$$\begin{tikzcd}
F_m \arrow[r, "f_m"] \arrow[d, "\varphi"'] & F & E \arrow[l, "f"'] \\
F'_m \arrow[ur, dashed, "g_m"'] & & H \arrow[ul, "f_H"] \arrow[u, "i_H"']
\end{tikzcd} \qquad f_m = g_m \circ \varphi$$

Gráfica 3.1

Como $H = f^{-1}(f_m(F_m)) = f^{-1}(g_m(F'_m))$ podemos considerar la restricción f_H de f a H. Además como g_m es inyectiva e $\mathrm{Im}(g_m) \supseteq f_H(H)$ podemos definir la aplicación lineal $g_m^{-1} \circ f_H$ de H en F'_m

$$g_m^{-1} \circ f_H : H \longrightarrow F'_m$$

Sea $G = \left\{ (x,z) / \ z = f(x),\ x \in E \right\}$ el gráfico (cerrado) de f ; y

$G' = \left\{ (x,y) \ / \ y = g_m^{-1} \circ f_H(x),\ x \in H \right\}$ el gráfico de $g_m^{-1} \circ f_H$. Definimos

$$\emptyset : H \times F'_m \longrightarrow E \times F$$

$$(x,y) \longmapsto (x, g_m(y))$$

$\emptyset$ es continua, pues la inclusión i_H de H en E y g_m de F'_m en F son continuas.

entonces
$$\begin{aligned} \emptyset^{-1}(G) &= \left\{ (x,y) / \ \emptyset\ (x,y) \in G,\ x \in H \right\} \\ &= \left\{ (x,y) / \ g_m(y) = f(x),\ x \in H \right\} \\ &= \left\{ (x,y) / \ g_m(y) = f_H(x),\ x \in H \right\} \\ &= \left\{ (x,y) / \ y = g_m^{-1} \circ f_H(x),\ x \in H \right\} \\ &= G' \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ G' es cerrado en $H \times F'_m$. Como H es tonelado con la topología del sub-espacio; por 2.2.11.b, $g_m^{-1} \circ f_H$ es continua. Ahora, por ser H denso en E y F'_m completo, existe una extensión $\tilde{f}$ de $g_m^{-1} \circ f_H$, de E en F'_m lineal y continua [1] (proposición 2.9.5. Página 129), tal que:

$$\tilde{f}/_H = g_m^{-1} \circ f_H \Longrightarrow g_m \circ \tilde{f}/_H = f_H$$

Probaremos que $g_m \circ \tilde{f} = f \quad \forall x \in E$:

Supongamos que $g_m \circ \tilde{f} \neq f \Longrightarrow \exists\, x_1 \in E$ tal que

$(x_1, g_m \circ \tilde{f}(x_1)) \notin G \Longrightarrow \exists\, U \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$ y $\exists\, V \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$

tal que $(x_1 + U) \times (g_m \circ \widetilde{f}(x_1) + V) \cap G = \emptyset.$ (1)

Como $g_m \circ \widetilde{f}$ es continua sobre E $\Longrightarrow \exists\, U_1 \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$

tal que $U_1 \subseteq U$ y $g_m(\widetilde{f}(U_1)) \subseteq V$.

$\bar{H} = E \Longrightarrow \exists\, x_2 \in H \cap (x_1 + U_1) \Longrightarrow$

$(x_2, f(x_2)) = (x_2, g_m \circ \widetilde{f}(x_2)) \in (x_1 + U_1) \times (g_m \circ \widetilde{f}(x_1 + U_1))$

$\Longrightarrow (x_2, f(x_2)) \in (x_1 + U) \times (g_m \circ \widetilde{f}(x_1) + g_m \circ \widetilde{f}(U_1))$

$\Longrightarrow (x_2, f(x_2)) \in (x_1 + U) \times g_m \circ \widetilde{f}(x_1) + V$

$\Longrightarrow (x_1 + U) \times (g_m \circ \widetilde{f}(x_1) + V) \cap G \neq \emptyset$

lo cual contradice a (1). Por lo tanto f es continua sobre E.

b. Sea $g : F \longrightarrow E$ lineal, continua y biyectiva. Entonces existe g^{-1}.

$$g^{-1} : E \longrightarrow F \text{ lineal y biyectiva}$$

Como g es continua $\Longrightarrow g^{-1}$ es abierta por 2.1.3 el gráfico de g^{-1} es cerrado; por la parte (a) g^{-1} es continua, es decir g es abierta.

Vamos a generalizar la proposición 3.2.2; y en (b), eliminaremos la inyectividad.

3.2.3 <u>TEOREMAS DEL GRAFICO CERRADO Y LA APLICACION ABIERTA, PARA LIMITES INDUCTIVOS</u>: Sea F un espacio LF-generalizado y E el Límite inductivo de espacios l.c. Baire y T_2. Entonces:

a. Toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

b. Toda aplicación lineal y continua g de F sobre E es abierta.

<u>PRUEBA</u>:

a. Sean F un LF-espacio generalizado, E el límite inductivo de la familia de espacios l.c. Baire $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$; y $\forall\alpha$, f_α la aplicación lineal y continua de E_α en E. $\forall_{\alpha\in I}$, consideremos la aplicación compuesta $h_\alpha = f \circ f_\alpha$ de E_α en F.

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, dashed, "f \circ f_\alpha = h_\alpha"'] & E \arrow[d, "f"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Gráfica 3.2

como $\forall_{\alpha\in I}$, f_α es continua y f tiene el gráfico cerrado; 2.1.5 $\Longrightarrow$ $\forall_{\alpha\in I}$, h_α tiene el gráfico cerrado. Como $\forall_{\alpha\in I}$, E_α es Baire y F un LF-espacio generalizado, por 3.2.2 $\forall_{\alpha\in I}$, h_α es continua, por 3.1.7 f es continua.

b. Como g es continua, $g^{-1}(0)$ es cerrado en F. Por 3.1.5 $F/g^{-1}(0)$ es un LF-espacio generalizado. Sea g' la aplicación lineal inyectiva de $F/g^{-1}(0)$ sobre E. 2.1.10.a $\Longrightarrow$ g' es continua. Luego g' es una aplicación lineal, continua y biyectiva de un LF-espacio generalizado en el Límite inductivo E de espacio l.c. Baire y T_2. Por 3.2.2.b g' es abierta, y 2.1.10.b $\Longrightarrow$ g es abierta.

3.2.4 <u>TEOREMA DE KOTHE</u>: Sean E y F dos espacios LF-generalizados:

a. Toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

b. Toda aplicación lineal y continua g de F sobre E es abierta.

PRUEBA:

Si E es un LF-espacio generalizado $\Longrightarrow$ E es el Límite inductivo estricto generalizado de espacios Frechets $(E_n)_{n\geqslant 1}$, pero un Frechet es localmente convexo, T_2 y Baire; por lo tanto 3.2.4 es un caso particular de 3.2.3.

3.2.5 TEOREMA DE DIEUDONNE Y SCHWARTZ: Sean E y F dos LF-espacios. Entonces:

a. Toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

b. Toda aplicación lineal y continua g de F sobre E es abierta.

PRUEBA:

Como todo LF-espacio, es un caso particular de un LF-espacio generalizado; 3.2.5 es un caso particular de 3.2.4.

3.2.6 TEOREMA DE GROTHENDIECK: Sea F un LF-espacio generalizado, y E un $\mathcal{B}$-espacio. Entonces:

a. Toda aplicación Lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

b. Toda aplicación lineal y continua g de F sobre E es abierta.

PRUEBA:

Si E es un $\mathcal{B}$-espacio $\Longrightarrow$ E es el límite inductivo de espacios Banach, cada uno de los cuales es loc. convexo, T_2 y Baire. Por lo tanto 3.2.6 es un caso particular de 3.2.3

CAPITULO 4

TEOREMA DEL GRAFICO CERRADO EN ESPACIOS TONELADOS Y BORNOLOGICOS

4.1 TEOREMAS TIPO MAHOWALD PARA EL TEOREMA DEL GRAFICO CERRADO.

El teorema de Mahowald para el teorema del gráfico cerrado, determina las características mínimas de un espacio E para que una función lineal de E en un espacio de Banach F con el gráfico cerrado sea continua. Mahowald en 1961 demuestra que E es por lo menos tonelado. Este teorema y algunas generalizaciones del mismo, se verán en esta sección.

4.1.1 <u>DEFINICION</u>: Sean E y F dos e.l.c. T_2 y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Definimos el conjunto $Q \subseteq F'$ por:

$$Q = \left\{ g \in F' \ / \ x \longmapsto \langle f(x), g \rangle \quad \text{es continua} \right\}$$

Es fácil de comprobar que Q es un sub-espacio vectorial de F'.

4.1.2 <u>LEMA</u>: Sean E y F dos e.l.c. T_2 y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces el gráfico G de f es cerrado $\Longleftrightarrow$ Q es $\sigma(F',F)$ denso en F'.

<u>PRUEBA</u>:

Sea $y \in F$, con tal que $g(y) = 0$ para todo $g \in Q$.

Entonces $(0,y) \in \bar{G}$, pues de lo contrario tendríamos que:

$(0,y) \notin \bar{G} \Longrightarrow \exists\, V \in \mathcal{V}((0,y), \mathcal{T}_{ExF})$, V abierta y convexa tal que $V \cap G = \emptyset$. Como G es un s.e. de ExF, por el teorema de Mazur [1] (Teorema 3.1.2. Página 177) existe un hiperplano cerrado H de ExF, tal que $H \supset G$ y $H \cap V = \emptyset \Longrightarrow \exists h \in (E \times F)'$, tal que

$h(x) = 0 \quad \forall x \in H$ y $h(x) \neq 0$ si $x \notin H$; pero

$(E \times F)' \cong E' \times F'$ y $h = (f', g')$ con $f' \in E'$ y $g' \in F'$

tal que $\forall z = (x,y) \in E \times F$, se tiene:

$\langle z,h \rangle = \langle (x,y), (f',g') \rangle = f'(x) + g'(y)$

[1] (Proposición 3.14.1, página 266).

Por lo tanto

$$\langle (0,y), (f',g') \rangle = \alpha \neq 0 \qquad (1)$$

pero $\forall (x,f(x)) \in G$ es

$$\langle (x,f(x)), (f',g') \rangle = \langle x,f' \rangle + \langle f(x),g' \rangle = 0$$

$\Longrightarrow \langle f(x),g' \rangle = -\langle x, f' \rangle$

$\Longrightarrow g' \in Q$, pues $f' \in E' \Longrightarrow x \rightsquigarrow -\langle x,f' \rangle$ es continua

pero $g' \in Q \Longrightarrow \langle y,g' \rangle = 0$ (2). de (1) se sigue que:

$\langle 0,f' \rangle + \langle y,g' \rangle = \alpha \neq 0 \Longrightarrow \langle y,g' \rangle = \alpha \neq 0$

lo cual contradice a (2). Entonces:

$(0,y) \in \bar{G} = G \Longrightarrow y = f(0) = 0 \Longrightarrow Q^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow Q^{\perp\perp} = F'$

Pero $Q^{\perp\perp} = \overline{Q}^{\sigma(F',F)} \Longrightarrow Q$ es $\sigma(F',F)$ - denso en F'.

$(\Longleftarrow)$ Sea Q $\sigma(F',F)$ - denso en F' y $(x_0,y_0) \notin G$

$\Longrightarrow y_0 \neq f(x_0) \Longrightarrow y_0 - f(x_0) \neq 0$

$\Longrightarrow \exists g \in Q$ tal que $\langle y_0 - f(x_0), g \rangle \neq 0$; pues si no.

como Q es $\sigma(F',F)$- denso en F' tendríamos que

$\forall g \in F'$

$<y_0-f(x_0),g> = 0 \Longrightarrow g(y_0-f(x_0)) = 0 \Longrightarrow y_0 = f(x_0)$

lo que contradice el hecho que $(x_0,y_0) \notin G$.

Ahora bien:

$g \in Q \Longrightarrow \exists f' \in E'$ tal que $<f(x),g> = -<x,f'> \quad \forall x \in E$

$\Longrightarrow <x,f'> + <f(x),g> = 0 \quad \forall x \in E \qquad (3)$

$\Longrightarrow <(x,f(x)),\ (f',g)> = 0 \quad \forall x \in E$

y si $(x,y) \in \bar{G} \Longrightarrow <(x,y)\ ,\ (f',g)> = 0$

Además:

$<(x_0,y_0),(f',g)> = <x_0,f'> + <y_0,g>$

$= <x_0,f'> + <f(x_0),g> + <y_0-f(x_0),g>$

por (3) $<(x_0,y_0),(f',g)> = 0 + <y_0-f(x_0),g> \neq 0$

$\Longrightarrow (x_0,y_0) \notin \bar{G}$. Luego G es cerrado.

4.1.3 PROPOSICION: Sea E un e.l.c. T_2 y T un tonel en E. Si q_T es la gauge de T y $N=\{x \in E/q_T(x)=0\}$. Entonces:

a. $N = \bigcap_{\lambda>0} \lambda T$ y N es cerrado

b. Si $M = (E/N, \mathcal{T}_c)$. Podemos identificar a M' con $N^{\perp}$ Es decir $M' \cong N^{\perp}$

PRUEBA:

a. $x \in N \Longleftrightarrow q_T(x) = 0 \Longleftrightarrow q_T(x) < \lambda,\ \forall \lambda > 0$

$\Longleftrightarrow x \in \lambda T \ \forall \lambda > 0 \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda>0} \lambda T$

como T es $\mathcal{T}$-cerrado $\Longrightarrow \bigcap_{\lambda>0} \lambda T$ es $\mathcal{T}$-cerrado

$\Longrightarrow N$ es cerrado.

b. Sea $M = (E/_N, \mathcal{T}_c)$, entonces

$M' = \left\{ g : E/_N \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ g \text{ es lineal y continua} \right\}$. Ahora:

$N^{\perp} = \left\{ f \in E' \ / \ \langle x,f \rangle = 0 \ , \ \forall x \in N \right\}$. Luego

$\forall f \in N^{\perp} \Longrightarrow \ker f \supset N$

Por una propiedad bien conocida del algebra lineal [8] (Teorema 1.2.c. Página 16)

$\forall f \in N \ , \ \exists\, g : E/_N \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal, tal que:

$f = g \circ \varphi$, donde φ es la suryección canónica de E sobre $E/_N$. Recíprocamente, $\forall\, g \in M'$, $f = g \circ \varphi$ es una forma lineal de E en $\mathbb{K}$. Además, $\forall\, x \in N$ es:

$$f(x) = g \circ \varphi\,(x) = g(N)$$

pero N es el cero de $E/_N$, luego

$f(x) = g(N) = g(0) = 0 \Longrightarrow f \in N^{\perp}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{K} \\ E/_N \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Gráfica 4.1

Como φ es lineal sobre, continua y abierta por 2.1.10.a f continua $\Longleftrightarrow$ g continua. Luego $N^{\perp}$ y M' se identifican por la biyección

$$\pi : N^{\perp} \longrightarrow M'$$

$$f \longmapsto \pi(f) = g$$

tal que $f = g \circ \varphi$

4.1.4 OBSERVACION: 1. Si E es l.c. y T_2, T un tonel en E, q_T la gauge de T y $N = \left\{ x \in E/\ q_T(x) = 0 \right\}$; denotaremos por $E_T = (E/_N, \bar{q}_T)$, donde $\bar{q}_T$ es la norma cociente de q_T. Por lo tanto $\hat{E}_T$ el completado de E_T es un espacio de Banach.

2. Denotaremos $M = (E/_N, \mathcal{T}_c)$.

La suryección canónica:

$$\varphi : E \longrightarrow M \text{ es continua}$$

pero $\varphi : E \longrightarrow E_T$ no es continua en general.

4.1.5 LEMA: Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. T_2 y T un tonel en E y $\varphi : E \longrightarrow E_T$ la suryección canónica. Entonces el gráfico de la aplicación lineal:

$$\varphi : E \longrightarrow \hat{E}_T \text{ es cerrado.}$$

PRUEBA:

Por 4.1.3.a $N = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda T$ y N es cerrado.

Para probar que φ de E en E_T tiene el gráfico cerrado, por 4.1.2 basta con probar que:

$Q = \left\{ g \in (\hat{E}_T)' / \text{la aplicación que a } x \longrightarrow \langle \varphi(x), g \rangle \text{ es continua} \right\}$ es $\sigma((\hat{E}_T)', \hat{E}_T)$ - denso en $(\hat{E}_T)'$. Ahora bien:

$\varphi : E \longrightarrow M$ es lineal, sobre continua y abierta; por 2.1.10.a la aplicación $\phi(x) = \langle \varphi(x), g \rangle$ es continua sobre E $\Longleftrightarrow$ g es continua sobre M.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \\ M \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \Phi = g\circ\varphi$$

Gráfica 4.2

Luego $g\in(\hat{E}_T)'$ está en $Q \Longleftrightarrow g$ es continua sobre M.

Para probar que Q es $\sigma((\hat{E}_T)',E_T)$ - denso en $(\hat{E}_T)'$, consideraremos el conjunto $\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^\circ$, probaremos que $\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^\circ\subset Q$ y que $\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^\circ$ es $\sigma((\hat{E}_T)',\hat{E}_T)$ - denso en $(\hat{E}_T)'$; y en consecuencia, también Q sería $\sigma((\hat{E}_T)',\hat{E}_T)$--denso en $(\hat{E}_T)'$

-Probaremos inicialmente que $\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^\circ\subset M'$

<u>PRUEBA:</u>

Sea $f\in\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^\circ \Longrightarrow \exists\,\lambda=\frac{1}{\alpha},\alpha>0$ tal que:

$f\in\frac{1}{\alpha}T^\circ \Longleftrightarrow |\langle x,f\rangle|\leq 1\ ,\quad \forall x\in\alpha T$

Por otro lado

$\forall x\in N \Longrightarrow x\in\varepsilon\alpha T\ \ \forall\varepsilon>0 \Longrightarrow \frac{x}{\varepsilon}\in\alpha T'$

$\Longrightarrow |\langle\frac{x}{\varepsilon},f\rangle|\leq 1,\ \forall\varepsilon>0$ y $\forall x\in N$

$\Longrightarrow |\langle x,f\rangle|\leq\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$ y $\forall x\in N$

$\Longrightarrow |\langle x,f\rangle| = 0\ ,\ \forall x\in N$

$\Longrightarrow f\in N^{\perp}$; por 4.1.3.b $f\in M' = N^{\perp}$

$\Longrightarrow$ cada $f\in\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^\circ$ es una forma lineal y continua sobre M.

-Probaremos ahora que $\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^\circ\subset(\hat{E}_T)'$

<u>PRUEBA:</u>

$(\hat{E}_T)' = (E_T)'$ [1] (Proposición 2.9.5. Página 129)

Luego basta probar que $\bigcup_{\lambda>0} \lambda T^\circ \subset (E_T)'$

Sea $g \in \bigcup_{\lambda>0} \lambda T^\circ \Longrightarrow \exists \lambda > 0 / \ g \in \lambda T^\circ$

$\Longrightarrow |<x,g>| \leq 1 \quad , \quad \forall x \in \frac{1}{\lambda} T$

$\Longrightarrow |<x,g>| \leq \varepsilon \quad , \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{\lambda} T$

Ahora bien:

Como $g(N) = 0$

$$\begin{aligned} |<x,g>| &= |g(x)| \\ &= |g(x) + g(N)| \\ &= |g(x + N)| \\ &= |g(\varphi(x))| = |<\varphi(x),g>| \end{aligned}$$

$\Longrightarrow |<\varphi(x),g>| \leq \varepsilon , \quad \forall \varphi(x) \in \frac{\varepsilon}{\lambda} \varphi(T) \qquad (1)$

Además

$$\varphi(T) \in \mathcal{V}(0,\bar{q}_T)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= \left\{ \bar{x} \in E_T / x \in T \right\} \\ &= \left\{ \bar{x} \in E_T / q_T(x) \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_T(N) = 0 \Longrightarrow \varphi(T) &= \left\{ \bar{x} \in E_T / \ q_T(x + N) \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \bar{x} \in E_T / \ \underset{Y \in x+N}{q_T(y)} \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \bar{x} \in E_T / \ \inf_{y \in \bar{x}} q_T(y) \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \bar{x} \in E_T / \ \bar{q}_T(\bar{x}) \leq 1 \right\} \\ &= \bar{q}_T^{\,-1}(B\,[0,1]) \\ &= V_{\bar{q}_T} \in \mathcal{V}(0,\bar{q}_T) \end{aligned}$$

Entonces también $\frac{\varepsilon}{\lambda} \varphi(T) \in \mathcal{V}(0,q_T) , \forall \varepsilon > 0$

consideremos ahora

$g^{-1}(B\,[0,\varepsilon]) = \left\{ \bar{x} \in E_T / \ |<\bar{x},g>| \leq \varepsilon \right\} \qquad$ por $\quad (1)$

$\frac{\varepsilon}{\lambda}\varphi(T) \subset g^{-1}(B[0,\varepsilon]) \Longrightarrow g^{-1}(B[0,\varepsilon]) \in \mathcal{V}(0,\tilde{q}_T)$

$\Longrightarrow g \in E_T'$

Luego $\bigcup_{\lambda>0} \lambda T^{\circ} \subset Q$

-Probaremos ahora que $\bigcup_{\lambda>0} \lambda T^{\circ}$ es $\sigma(E_T',\hat{E}_T)$-denso en E_T'

PRUEBA:

Los $\lambda\varphi(T)$, $\lambda>0$ constituyen un sistema fundamental de vecindades del cero en E_T; luego los $\overline{\lambda\varphi(T)}^{\sigma(\hat{E}_T,E_T')}$ forman base en el completado $\hat{E}_T$.

Vamos a denotar por $\bullet$ los polares respecto a la dualidad $(\hat{E}_T,E_T',<\ >)$

Luego $\overline{\lambda\varphi(T)}^{\sigma(\hat{E}_T,E_T')} = \lambda\varphi(T)^{\bullet\bullet}$

pero

$\varphi(T)^{\circ\circ} = T^{\circ\bullet}$

en efecto

$\varphi(T)^{\bullet} = \left\{ g \in E_T' / |<\varphi(x), g>| \leqslant 1 \ , \forall\ \varphi(x) \in \varphi(T) \right\}$

$\Longrightarrow g \in T^{\circ} \Longleftrightarrow |<x,g>| \leqslant 1 \ , \quad \forall\, x \in T$

$\Longleftrightarrow |<\varphi(x),g>| \leqslant 1 \quad , \quad \varphi(x) \in \varphi(T) \Longleftrightarrow g \in \varphi(T)^{\bullet}$

$\Longrightarrow \varphi(T)^{\bullet} = T^{\circ} \Longrightarrow \varphi(T)^{\bullet\bullet} = T^{\circ\bullet}$

$\Longrightarrow \lambda T^{\circ\bullet}$ constituyen un sistema fundamental de vecindades del cero en $\hat{E}_T \Longrightarrow$ los conjuntos $\lambda T^{\circ\bullet\bullet}$, $\lambda>0$ constituyen un sistema fundamental de sub-conjuntos equicontinuos de E_T'

$\Longrightarrow \bigcup_{\lambda>0} T^{\circ\bullet\bullet} = E_T'$

pero

$$T^{\circ\circ\circ} = \overline{T^{\circ}}^{\sigma(E'_T,\hat{E}_T)} \Longrightarrow \overline{\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^{\circ}}^{\sigma(E'_T,\hat{E}_T)} = \overline{\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^{\circ}}^{\sigma(E'_T,\hat{E}_T)}$$

$$= \bigcup_{\lambda>0}\lambda T^{\circ\circ\circ}$$

$$= E'_T$$

luego

$$\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^{\circ} \subset Q \Longrightarrow \overline{\bigcup_{\lambda>0}\lambda T^{\circ}}^{\sigma(E'_T,\hat{E}_T)} \subseteq \overline{Q}^{\sigma(E'_T,\hat{E}_T)}$$

$$\Longrightarrow \overline{Q}^{\sigma(E'_T,E_T)} = E'_T = (\hat{E}_T)'$$

Por 4.1.2 $\varphi : E \longrightarrow \hat{E}_T$ tiene el gráfico cerrado.

4.1.6 TEOREMA DE MAHOWALD: Sea (E,τ) un e.l.c. T_2. "Si para cada espacio de Banach F y para cada f de E en F lineal, cuyo gráfico es cerrado es necesariamente continua." Entonces E es tonelado.

PRUEBA:

Sea T un tonel en E, por 4.1.5

$\varphi : E \longrightarrow \hat{E}_T$ tiene el gráfico cerrado, pero $\hat{E}_T$ es un espacio de Banach luego por hipótesis φ es continua. Como $\overline{\varphi(T)} \in \mathcal{V}(0,q_T) \Longrightarrow \varphi^{-1}(\overline{\varphi(T)}) \in \mathcal{V}(0,\tau)$ pero $\varphi^{-1}(\overline{\varphi(T)}) \subset T$. En efecto:

$$\varphi^{-1}(\overline{\varphi(T)}) = \left\{x \in E / \varphi(x) \in \overline{\varphi(T)}\right\}$$

sea $x \in \varphi^{-1}(\overline{\varphi(T)}) \Longrightarrow \varphi(x) \in \overline{\varphi(T)}$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \bar{y}_n \quad \text{con} \quad (\bar{y}_n)_{n\geq 1} \subseteq \varphi(T)$$

$$\begin{aligned}\langle x, q_T\rangle &= \langle \varphi(x), \bar{q}_T\rangle \\ &= \bar{q}_T(\varphi(x)) \\ &= \bar{q}_T(\lim_{n\to\infty} \bar{y}_n) \\ &= \lim_n \bar{q}_T(\bar{y}_n) \leq 1\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \langle x, q_T\rangle \leq 1 \Longleftrightarrow x \in T$

luego $T \in \mathcal{V}(0,\tau) \Longrightarrow (E,\tau)$ es tonelado.

Las proposiciones 4.1.7 y 4.1.8 las utilizaremos en varias ocasiones más adelante.

4.1.7 <u>PROPOSICION</u>: Sean (E,τ_E) y (F,τ_F) dos e.l.c. y T_2. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ una red de Cauchy en E y $(y_\alpha)_{\alpha\in D'}$ una red de Cauchy en F. Entonces

a. $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(E,F)} 0 \Longleftrightarrow |\langle x_\alpha, y\rangle| \xrightarrow[\alpha\in D]{} 0 \quad \forall y \in F$

b. $y_\alpha \xrightarrow{\sigma(F,E)} 0 \Longleftrightarrow |\langle x, y_\alpha\rangle| \xrightarrow[\alpha\in D']{} 0 \quad \forall x \in E$

<u>PRUEBA</u>:

a. $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(E,F)} 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall y \in F, \exists \beta \in D$ tal que

$\forall \alpha \geq \beta \Longrightarrow x_\alpha \in \varepsilon\{y\}^\circ \in \mathcal{V}(0, \sigma(E,F))$

$\Longleftrightarrow |\langle x_\alpha, y\rangle| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall y \in F \quad \forall \alpha \geq \beta$

$\Longleftrightarrow \forall y \in F, \quad |\langle x_\alpha, y\rangle| \xrightarrow[\alpha\in D]{} 0$

b. Demostración análoga a la de (a).

4.1.8 <u>PROPOSICION</u>: Sean (E,τ_E) y (F,τ_F) dos espacios l.c. y T_2. Sea f: $E \longrightarrow F$ lineal. Entonces los siguientes enunciados son equivalente:

a. El gráfico de es cerrado.

b. Existe una topología τ l.c. y T_2 sobre F, tal que:

$\tau \preccurlyeq \tau_F$ y f es $\tau_E - \tau$ continua.

PRUEBA:

(b)$\Longrightarrow$(a) sea τ l.c. y T_2 sobre F tal que $\tau \preccurlyeq \tau_F$ y f $\tau_E - \tau$ continua. Entonces el gráfico de f es $\tau_E \times \tau$ cerrado en ExF, pero $\tau_E \times \tau \preccurlyeq \tau_E \times \tau_F \Longrightarrow$ El gráfico de f es $\tau_E \times \tau_F$ cerrado en ExF. Es decir el gráfico de f es cerrado.

$$\begin{tikzcd}
E_{\tau_E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & F_{\tau} \arrow[dl, "I_F"] \\
& F_{\tau_F} &
\end{tikzcd}$$

Gráfica 4.3

(a) $\Longrightarrow$(b) Supongamos que $f : E \longrightarrow F$ no es continua respecto a ninguna topología T_2, menos fina que τ_F.

Consideremos τ la topología sobre F generada por el sistema de vecindades para cero.

$$\mathcal{B} = \{U + f(V) / \ U \in \mathcal{V}(0, \tau_F) \ \text{y} \ V \in \mathcal{V}(0, \tau_E)\}$$

entonces $\tau \preccurlyeq \tau_F$. En efecto pues si

$W \in \mathcal{V}(0, \tau) \Longrightarrow W = U + f(V)$ con $U \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$ y $V \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$; pero $U + f(V) \supset U \Longrightarrow W \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$

Además f es $\tau_E - \tau$ continua, pues

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(U + f(V))$$
$$= f^{-1}(U) + f^{-1}(f(V))$$

$\Longrightarrow f^{-1}(W) \supset f^{-1}(U) + V \supset V$

$\Longrightarrow f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$

Es decir f es τ_E- τ continua. Así, por nuestra suposición τ no es $T_2 \Longrightarrow \exists\, y \in F$, $y \neq 0$ tal que

$\forall\, U \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$, U equilibrada

$y \forall V \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$, $y \in U + f(V) \Longrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(0, \tau_E)$, $\exists x_V \in V$

tal que:

$y \in U + f(x_V) \Longrightarrow f(x_V) \in y + U$

Como V es arbitrario, existe $(x_V)_{V \in \mathcal{V}}$ tal que

$x_V \xrightarrow{\tau_E} 0$, y $f(x_V) \xrightarrow{\tau_F} y \neq 0$

Es decir:

$(0, y) \in \overline{G}_f$, pero $(0, y) \notin G_f$

$\Longrightarrow \overline{G}_f \neq G_f$ lo cual niega (a).

Vamos a generalizar el teorema de Mahowald a dos clases de e.l.c. que generalizan los espacios tonelados: los espacios σ-tonelados y s-tonelados los cuales vamos a definir a continuación:

4.1.9 DEFINICION: Sea (E, τ) un e.l.c. T_2. Sea $T \subset E$. T es un σ-tonel (sigma tonel) si y sólo si $\exists (y_n)_{n \geq 1} \subseteq E'$, $(y_n)_{n \geq 1}$ $\sigma(E', E)$-acotado tal que

$T = \bigcap_{n \geq 1} \{y_n\}^\circ$.

Todo σ-tonel es un tonel.

4.1.10 <u>DEFINICION:</u> Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c. T_2. E es σ-tonelado si y sólo si

$\forall (y_n)_{n\geq 1} \subseteq E'$, $\sigma(E',E)$-acotado $\Longrightarrow (y_n)_{n\geq 1}$ es equicontinua. Esto equivale a decir que si T es un σ-tonel, entonces $T\in\mathcal{V}(0,\mathcal{T})$.

4.1.11 <u>DEFINICION:</u> Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c. T_2. Sea $T\subset E$, T es un s-tonel si y sólo si $\exists (y_n)_{n\geq 1}\subset E'$; $(y_n)_{n\geq 1}$ converge a 0 en E' con la topología débil $\sigma(E',E)$, tal que $T = \bigcap_{n\geq 1} \{y_n\}^{\circ}$. Todo s-tonel es un tonel.

4.1.12 <u>DEFINICION:</u> Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c. T_2 E es s-tonelado si y sólo si $\forall (y_n)_{n\geq 1}\subset E'$, $y_n \xrightarrow{\sigma(E',E)} 0$ $\Longrightarrow (y_n)_{n\geq 1}$ es equicontinua. Esto equivale a decir que si T es un s-tonel, entonces $T\in\mathcal{V}(0,\mathcal{T})$

En 1.1.2 vimos como ejemplos de e.l.t. a:

$$(\ell^\infty, \| \|_\infty) = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} / \sup |x_n| < \infty \right\}$$

$$(\ell^1, \| \|_1) = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

$$(c_0, \| \|_\infty) = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} / x_n \longrightarrow 0 \right\}$$

También cada uno de ellos es l.c. y T_2 por ser normados.

Además ℓ^∞ es el dual topológico de ℓ^1. [9] (Ejercicio 32. Página 38.

Es decir $(\ell^1)' = \ell^\infty$ y $(\ell^1, \ell^\infty, <\ >)$ constituye un sistema dual, aunque $\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)'$

$\forall x \in \ell^1$, $x = (x_n)_{n \geq 1}$, y $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, y $\forall y \in \ell^\infty$ $y = (y_n)_{n \geq 1}$

$\sup |y_n| < \infty$ tenemos que: $\langle x,y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty$

Sea K el sub-espacio de ℓ^1, definido por:

$$K = \left\{ (y_n)_{n \geq 1} / \exists\, no : \forall n \geq no \Longrightarrow y_n = 0 \right\}$$

luego:

$\sigma(\ell^\infty, K) \leq \sigma(\ell^\infty, \ell^1) \leq \mathcal{T}_{\|\|_\infty}$; y como $C_0 \subset \ell^\infty \Longrightarrow$

$\sigma(C_0, K) = \sigma(\ell^\infty, K)/_{C_0} \leq \mathcal{T}_{\|\|_\infty}(C_0)$.

Para todo $n \geq 1$, sea e_n la sucesión definida por:

$$e_n = (\delta_p^n)_{p \geq 1}$$

donde

$$\delta_p^n = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq n \\ 1 \text{ si } p = n \end{cases}$$

luego $e_n \in K \subset \ell^1$

4.1.13 <u>PROPOSICION:</u> Sea $\bar{e}_n$ la aplicación definida en ℓ^∞ por:

$$\bar{e}_n : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que $\forall y \in \ell^\infty$, $y = (\xi_p)_{p \geq 1}$

$$\begin{aligned} \bar{e}_n(y) &= \langle e_n, y \rangle \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p^n \xi_p \\ &= \xi_n \end{aligned}$$

$\bar{e}_n$ así definida es lineal y $\sigma(\ell^\infty, K) - \mathcal{T}_{\mathbb{K}}$ continua.

En efecto:

a. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x, y \in \ell^\infty$

$\bar{e}_n(\alpha x + \beta y) = \bar{e}_n((\alpha x_p)_{p \geq 1} + (\beta y_p)_{p \geq 1})$

$$= \bar{e}_n((\alpha x_p + \beta y_p)_{p\geq 1})$$

$$= \alpha x_n + \beta y_n$$

$$= \alpha \bar{e}_n(x) + \beta \bar{e}_n(y)$$

luego $\bar{e}_n$ es lineal.

b. Sea $\forall \varepsilon > 0$, $B[0,\varepsilon] = \left\{ \gamma \in \mathbb{K} \; / \; |\gamma| \leq \varepsilon \right\}$

Entonces:

$\bar{e}_n^{-1}(B[0,\varepsilon]) = \left\{ x \in \ell^\infty / |\bar{e}_n(x)| \leq \varepsilon,\ e_n \in K \right\}$

y por definición de las vecindades de la topología $\sigma(\ell^\infty, K)$ sobre ℓ^∞, $\bar{e}_n^{-1}(B[0,\varepsilon]) \in \mathcal{V}(0, \sigma(\ell^\infty, K))$

es decir $\bar{e}_n$ es $\sigma(\ell^\infty, K)$ $-\mathcal{T}_{\mathbb{K}}$ continua.

4.1.14 <u>LEMA</u>: Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c. y $T \subset E$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. T es un σ-tonel

ii. $\exists\, f : E \longrightarrow \ell^\infty$, lineal $\mathcal{T}-\sigma(\ell^\infty, K)$ continua y tal que $T = f^{-1}(B_{\ell_\infty}[0,1])$

<u>PRUEBA</u>:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) sea T un σ-tonel. Entonces existe $(y_n)_{n\geq 1} \subseteq E'$, $(y_n)_{n\geq 1}$ $\sigma(E',E)$-acotada tal que $T = \bigcap_{n\geq 1} \{y_n\}^\circ$. Como T es un tonel $\Longrightarrow$

$\forall x \in E$, $\exists \lambda > 0$: $x \in \lambda T = \lambda \bigcap_{n\geq 1} \{y_n\}^\circ$.

$\Longrightarrow x \in \bigcap_{n\geq 1} \lambda \{y_n\}^\circ$

$\Longrightarrow x \in \bigcap \left\{\frac{1}{\lambda} y_n\right\}^\circ \Longrightarrow \left|\frac{1}{\lambda} y_n(x)\right| \leqslant 1 \quad \forall n \geqslant 1,$

$\Longrightarrow \sup_n |y_n(x)| \leqslant \lambda \Longrightarrow (y_n(x))_{n \geqslant 1} \in \ell^\infty, \ \forall x \in E$

Definimos ahora $f : E \longrightarrow \ell^\infty$

$\forall x \in E, \ f(x) = (y_n(x))_{n \geqslant 1} \in \ell^\infty$

a. f es lineal

Sea $x_1, x_2 \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= (y_n(\alpha x_1 + \beta x_2))_{n \geqslant 1} \\
&= (\alpha y_n(x_1) + \beta y_n(x_2))_{n \geqslant 1} \\
&= (\alpha y_n(x_1))_{n \geqslant 1} + (\beta y_n(x_2))_{n \geqslant 1} \\
&= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)
\end{aligned}
$$

b. f es τ-$\sigma(\ell^\infty, K)$ continua

Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red en (E, τ) tal que $\lim\limits_{\alpha \in D} x_\alpha = 0$

$$f(x_\alpha) = (y_n(x_\alpha))_{n \geqslant 1} \ \forall \alpha \in D$$

Sea $p \in K$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p = (p_1, p_2, \ldots p_m, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$
\begin{aligned}
\langle p, f(x_\alpha) \rangle &= \langle (p_n)_{n \geqslant 1}, (y_n(x_\alpha))_{n \geqslant 1} \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{m} y_n(x_\alpha)\, p_n
\end{aligned}
$$

como $\forall n, \ y_n \in E' \Longrightarrow y_n(x_\alpha) p_n \xrightarrow[\alpha \in D]{} 0$

$\Longrightarrow |\langle p, f(x_\alpha) \rangle| \longrightarrow 0 \quad \forall p \in k$

por 4.1.7.b

$$f(x_\alpha) \xrightarrow[\alpha \in D]{\sigma(\ell^\infty, K)} 0$$

Por último:

c. $T = f^{-1}(B_{\| \|_\infty}[0,1])$

$$T = \bigcap_{n \geq 1} \{y_n\}^\circ$$

$$= \{x \in E / \ x \in \{y_n\}^\circ, \ \forall n \geq 1\}$$

$$= \{x \in E / |<x, y_n>| \leq 1, \ \forall n \geq 1\}$$

$$= \{x \in E / \ \sup_{n \geq 1} |<x, y_n>| \leq 1\}$$

$$= \{x \in E / \ \operatorname{Sup}_{n \geq 1} |y_n(x)| \leq 1\}$$

$$= \{x \in E / \ \| f(x) \|_\infty \leq 1\}$$

$$= f^{-1}(B[0,1])$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Sea $f : E \longrightarrow \ell^\infty$ lineal tal que f es $\mathcal{T}-\sigma(\ell^\infty, K)$ continua y $f^{-1}(B[0,1]) = T$. Vamos a probar que T es un σ-tonel.

<u>PRUEBA</u>:

$\forall n \geq 1$ sea $\bar{e}_n : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$

tal que:

$\forall y \in \ell^\infty$, $y = (\xi_p)_{p \geq 1}$, $\bar{e}_n(y) = \xi_n$

por 4.1.13 $\bar{e}_n$ es lineal y $\sigma(\ell^\infty, K)-\mathcal{T}_{\mathbb{K}}$ continua.

$\forall_{n \geq 1}$, sea $y_n = \bar{e}_n \circ f$ de E en $\mathbb{K}$ entonces $\forall n \geq 1, y_n$ es lineal y $\mathcal{T}-\mathcal{T}_{\mathbb{K}}$ continua. Es decir $(y_n)_{n \geq 1} \subseteq E'$ y

$\forall x \in E$, $y_n(x) = \bar{e}_n(f(x))$

$$= \bar{e}_n((\xi_p)_{p \geq 1})$$

$$= \xi_n$$

luego $\sup|y_n(x)| = \sup\limits_{n\geq 1}|\xi_n| = \lambda < \infty$; pues $(\xi_n)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$

$\Longrightarrow (y_n)_{n\geq 1} \subset \lambda\{x\}^\circ \Longrightarrow (y_n)_{n\geq 1}$ es $\sigma(E',E)$-acotado pues los $\lambda\{x\}^\circ$ forman base.

Por último:

$$
\begin{aligned}
T &= f^{-1}(B[0,1]) \\
&= \left\{x\in E/ \ \|f(x)\|_\infty \leq 1, \text{ donde } f(x) = (\xi_p)_{p\geq 1}\right\} \\
&= \left\{x\in E/ \sup_{n\geq 1} |\xi_n|\leq 1\right\} \\
&= \left\{x\in E/ \sup_{n\geq 1} |\bar{e}_n(\xi_p)_{p\geq 1}|\leq 1\right\} \\
&= \left\{x\in E/ \sup_{n\geq 1} |\bar{e}_n \circ f(x)|\leq 1\right\} \\
&= \left\{x\in E/ \sup_{n\geq 1} |y_n(x)|\leq 1\right\} \\
&= \left\{x\in E/ |\langle x,y_n\rangle|\leq 1, \ \forall n\geq 1\right\} \\
&= \bigcap_{n\geq 1}\{y_n\}^\circ
\end{aligned}
$$

luego T es un σ-tonel. Tenemos entonces:

4.1.15 <u>TEOREMA TIPO MAHOWALD PARA σ-TONELADOS</u>:

Sea $(E,\mathcal{T}_E)$ un e.l.c. T_2 tal que cada f de E en ℓ^∞, lineal y con gráfico cerrado es necesariamente continua, entonces E es σ-tonelado.

<u>PRUEBA</u>:

Sea T un σ-tonel, por 4.1.14 existe f lineal de E en ℓ^∞ tal que f es $\mathcal{T}_E$-$\sigma(\ell^\infty,K)$ continua y $T = f^{-1}(B[0,1])$. Como $\sigma(\ell^\infty,K) \leq \mathcal{T}_{\|\|_\infty}$ por 4.1.8 el gráfico de f es cerrado en $E \times \ell^\infty$ con la topología $\mathcal{T}_E \times \mathcal{T}_{\|\|_\infty}$, entonces por hipotesis f es $\mathcal{T}_E$-$\mathcal{T}_{\|\|_\infty}$ continua $\Longrightarrow T = f^{-1}(B[0,1]) \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E)$

$\Longrightarrow (E,\mathcal{T})$ es σ-tonelado.

El siguiente lema es para el teorema tipo Mahowald para los s-tonelados.

4.1.16 LEMA: Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c. y T_2 sea $T \subseteq E$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

i. T es un s-tonel

ii. $\exists f: E \longrightarrow C_0$ lineal $\mathcal{T}-\sigma(C_0,K)$ continua y tal que $T = f^{-1}(B[0,1])$.

PRUEBA:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Sea T un s-tonel $\Longrightarrow \exists \{y_n\}_{n\geq 1} \subset E'$

$y_n \xrightarrow{\sigma(E',E)} 0$

y $T = \bigcap_{n\geq 1} \{y_n\}^\circ$ por 4.1.7.b $|\langle x,y_n\rangle| \longrightarrow 0 \quad \forall x \in E$

es decir $(y_n(x))_{n\geq 1} \in C_0 \quad \forall x \in E$.

Definimos entonces $f: E \longrightarrow C_0$ tal que

$\forall x \in E,\ f(x) = (y_n(x))_{n\geq 1} \in C_0$

a. f así definida es lineal, tal como vimos en 4.1.14.a

b. f es $\mathcal{T}-\sigma(C_0,K)$ continua.

En efecto:

Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in D} \subset E$ tal que $x_\alpha \longrightarrow 0$;

$f(x_\alpha) = (y_n(x_\alpha))_{n\geq 1} \quad \forall \alpha \in D$

Sea $p \in K, \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $p = (p_1,p_2,\ldots p_m,0,0\ldots)$

y

$$\langle p, f(x_\alpha)\rangle = \langle (p_n)_{n\geq 1}, (y_n(x_\alpha))_{n\geq 1}\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{m} y_n(x_\alpha) p_n$$

Como $\forall n$, $y_n \in E' \Longrightarrow \lim\limits_{\alpha} y_n(x_\alpha) p_n = 0$

$\Longrightarrow |\langle p, f(x_\alpha)\rangle| \longrightarrow 0$, $\forall p \in K$ Por 4.1.7.a

$f(x_\alpha) \xrightarrow{(C_0,K)} 0 \Longrightarrow f$ es $\mathcal{T}-\sigma(C_0,K)$ continua

c. $T = f^{-1}(B[0,1])$

Demostración análoga a 4.1.14.c

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sea $f: E \longrightarrow C_0$ lineal y $\mathcal{T}-\sigma(C_0,K)$ continua, y $f^{-1}(B[0,1]) = T$. Vamos a probar que T es un s-tonel.

PRUEBA:

$\forall n \geq 1$, sea $\bar{e}_n : C_0 \longrightarrow \mathbb{K}$

la restricción de $\bar{e}_n$ de ℓ^∞ a C_0 tal que:

$\forall y \in C_0$, $y = (\xi_p)_{p\geq 1}$, $\bar{e}_n(y) = \xi_n$

por 4.1.13 $\bar{e}_n$ es lineal, y como $\bar{e}_n$ es $\sigma(\ell^\infty,K)-\mathcal{T}_{\mathbb{K}}$ continua entonces $\bar{e}_n$ es $\sigma(C_0,K)-\mathcal{T}_{\mathbb{K}}$ continua, considerando la restricción de $\bar{e}_n$ al sub-espacio C_0.

$\forall n \geq 1$, sea $y_n = \bar{e}_n \circ f$ de E en $\mathbb{K}$, entonces $\forall n \geq 1$ y_n es lineal y $\mathcal{T}-\mathcal{T}_{\mathbb{K}}$ continua. Es decir $(y_n) \subseteq E'$ y $\forall x \in E$:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \bar{e}_n(f(x)) \\ &= \bar{e}_n((\xi_p)_{p\geq 1}) \\ &= \xi_n \end{aligned}$$

y como $(\xi_n) \in C_0 \Longrightarrow \xi_n \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$

Es decir

$\forall x \in E$, $|\langle x, y_n\rangle| \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$

por 4.1.7.h $(y_n) \xrightarrow{\sigma(E',E)} 0$

Por último como

$T = f^{-1}(B[0,1])$ entonces;

$T = \bigcap_{n \geqslant 1} \{y_n\}^{\circ}$

(la prueba es la misma que hicimos al final de 4.1.14.c)

4.1.17 <u>TEOREMA TIPO MAHOWALD PARA S-TONELADOS</u>: Sea $(E,\mathcal{T}_E)$ un e.l.c. T_2 tal que cada f de E en C_0, lineal y con gráfico cerrado es necesariamente continua, entonces $(E,\mathcal{T}_E)$ es s-tonelado.

<u>PRUEBA</u>:

Sea $T \subset E$ un s-tonel. Por 4.1.16 existe f lineal de E en C_0 tal que f es $\mathcal{T}_E$-$\sigma(C_0,K)$ continua y $T = f^{-1}(B[0,1])$ como $\sigma(C_0,K) \leqslant \mathcal{T}_{\|\ \|_\infty}(C_0)$, por 4.1.8 el gráfico de f es cerrado en ExC_0 con la topología $\mathcal{T}_E \times \mathcal{T}_{\|\ \|_\infty}(C_0) \Longrightarrow$ f es $\mathcal{T}_E$- $\mathcal{T}_{\|\ \|_\infty}(C_0)$ continua $\Longrightarrow T = f^{-1}(B[0,1]) \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E) \Longrightarrow (E,\mathcal{T})$ es s-tonelado.

4.2 ALGUNAS EQUIVALENCIAS DEL TEOREMA DEL GRAFICO CERRADO EN ESPACIOS TONELADOS.

En esta sección intentamos caracterizar los espacios F,l.c. y T_2 tales que toda aplicación lineal f de un espacio Tonelado E en F, con el gráfico cerrado es continua. Sea $(F,\mathcal{T}_F)$ un e.l.c. T_2; sabemos que F, tiene una base de toneles para el Filtro de vecindades del cero [1] (Proposición 2.4.4, página 87), además la topología l.c. más fina sobre F, es tonelada pues cada tonel es un disco absorbente.

Entonces el conjunto

$\pi = \{ \tau / \tau \geqslant \tau_F$ y (F,τ) es Tonelado $\}$

es no vacío y acotado inferiormente. Al extremo inferior de π lo denotaremos por τ_F^t, que es una topología sobre F, más fina que τ_F.

4.2.1 PROPOSICION: Sea (F,τ_F) un e.l.c. T_2 entonces (F,τ_F^t) es tonelado.

PRUEBA:

La topología τ_F^t es constructible a partir de τ_F.

En efecto:

Sea $B_1 = \{ T \subset F / T$ es un τ_F-tonel $\}$

B_1 es base del filtro de vecindades del cero para una topología l.c. τ_1 sobre F y $\tau_1 \geqslant \tau_F$. Si $\tau_1 = \tau_F$, se deduce de inmediato que (F,τ_F) es tonelado y

$\tau_F^t = \tau_F$

Si $\tau_1 \neq \tau_F$, definimos

$B_2 = \{ T \subset F / T$ es un τ_1-tonel $\}$

igual que antes, B_2 es base del filtro de vecindades del cero, para una topología l.c. τ_2 sobre F, tal que $\tau_2 \geqslant \tau_1$ y si $\tau_2 = \tau_1$; entonces (F,τ_1) es tonelado y $\tau_F^t = \tau_1$

si $\mathcal{T}_2 \neq \mathcal{T}_1$ continuamos con este proceso inductivo; para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos construir la topología l.c.$\mathcal{T}_k$ sobre F que tiene como base del filtro de vecindades del cero al conjunto:

$B_k = \{T \subset F / T \text{ es un } \mathcal{T}_{k-1} \text{ tonel}\}$.

Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n-1}$

$\Longrightarrow (F, \mathcal{T}_{n-1})$ es tonelado y $\mathcal{T}_F^t = \mathcal{T}_{n-1}$

Si ocurre que $(F, \mathcal{T}_n)$ no es tonelado para ningún $n \in \mathbb{N}$, definimos para cada ordinal α transfinito el conjunto

$$B_\alpha = \begin{cases} \{T \subset F / T \text{ es un } \mathcal{T}_{\alpha-1} \text{ tonel}\} & \text{si } \alpha \text{ tiene antecesor} \\ \bigcup_{\alpha > \beta} B_\beta & \text{si } \alpha \text{ no tiene antecesor.} \end{cases}$$

por inducción transfinita y como π tiene cota superior, existe un menor ordinal tal que $\mathcal{T}_{\alpha+1} = \mathcal{T}_\alpha$.

$\Longrightarrow (F, \mathcal{T}_\alpha)$ es tonelado y $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}_F^t$

4.2.2 DEFINICION: Sea $(F, \mathcal{T}_F)$ un e.l.c. T_2. A la topología tonelada $\mathcal{T}_F^t$, la menos fina entre las topologías toneladas más finas que $\mathcal{T}_F$, la llamaremos la topología tonelada asociada a $\mathcal{T}_F$.

4.2.3 PROPOSICION: Sean $(E, \mathcal{T})$ y $(F, \mathcal{J})$ dos e.l.c. y sea $f : E \longrightarrow F$ lineal y continua entonces, $\forall \alpha$ ordinal:

$$f : E_{\mathcal{T}_\alpha} \longrightarrow F_{\mathcal{J}_\alpha} \quad \text{es continua}$$

PRUEBA: (Por Inducción)

Si $\alpha = 1$ $A_1 = \{T \subset E / T \text{ es } \mathcal{T}\text{-tonel}\}$

$B_1 = \{S \subset F / S \text{ es } \mathcal{J}\text{-tonel}\}$

A_1 es base de $\mathcal{V}(0, \mathcal{T}_1)$ y B_1 es base de $\mathcal{V}(0, \mathcal{J}_1)$

$\forall\ U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{J}_1) \Longrightarrow \exists S \subset F$, $\mathcal{J}$-tonel tal que $S \subset U$

$\Longrightarrow f^{-1}(S) \subset f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(S)$ es un $\mathcal{T}$-tonel

$\Longrightarrow f^{-1}(S) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_1)$

$\Longrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_1) \Longrightarrow$ f es $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{J}_1$ continua

Supongamos que f es $\mathcal{T}_{n-1} - \mathcal{J}_{n-1}$ continua y sea:

$A_n = \{T \subset E / T \text{ es } \mathcal{T}_{n-1}\text{-tonel}\}$

$B_n = \{S \subset F / S \text{ es } \mathcal{J}_{n-1}\text{-tonel}\}$

A_n es base de $\mathcal{V}(0, \mathcal{T}_n)$ y B_n es base de $\mathcal{V}(0, \mathcal{J}_n)$

$\forall\ U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{J}_n) \Longrightarrow \exists S \subset F$, $\mathcal{J}_{n-1}$-tonel tal que $S \subset U$

$\Longrightarrow f^{-1}(S) \subset f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(S)$ es un $\mathcal{T}_{n-1}$-tonel

$\Longrightarrow f^{-1}(S) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_n) \Longrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_n) \Longrightarrow$

f es $\mathcal{T}_n$-$\mathcal{J}_n$ continua.

Supongamos que f es $\mathcal{T}_\beta$- $\mathcal{J}_\beta$ continua para todo ordinal $\beta < \alpha$. Ahora bien, si α tiene antecesor

Sea $A_\alpha = \{T \subset E / T \text{ es } \mathcal{T}_{\alpha-1}\text{-tonel}\}$

y $B_\alpha = \{S \subset E / S \text{ es } \mathcal{J}_{\alpha-1}\text{-tonel}\}$

f es $\mathcal{T}_\alpha$-$\mathcal{J}_\alpha$ continua. La prueba es análoga que para n.

Si α no tiene antecesor

Sea $A_\alpha = \{\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta / A_\beta \text{ es base del cero de } \mathcal{T}_\beta\}$

y $B_\alpha = \{\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta / B_\beta \text{ es base del cero de } \mathcal{J}_\beta\}$

A_α es base de $\mathcal{V}(0, \mathcal{T}_\alpha)$ y B_α es base de $\mathcal{V}(0, \mathcal{J}_\alpha)$

$\forall U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_\alpha) \Longrightarrow \exists S \subset F$, tal que S es $\mathcal{T}_\beta$ -tonel para algún $\beta<\alpha$ tal que $S\subset U$

$\Longrightarrow f^{-1}(S) \subset f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(S)$ es un $\mathcal{C}_\beta$-tonel

$\Longrightarrow f^{-1}(S) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{C}_\alpha) \Longrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{C}_\alpha)$

$\Longrightarrow f$ es $\mathcal{C}_\alpha$ - $\mathcal{T}_\alpha$ continua $\forall \alpha$ ordinal.

4.2.4 <u>COROLARIO</u>: Sean $(E,\mathcal{C})$ y $(F,\mathcal{T})$ dos e.l.c. Sea $f : E_{\mathcal{C}} \longrightarrow F_{\mathcal{T}}$ lineal y continua. Entonces:

$$f : E_{\mathcal{C}^t} \longrightarrow F_{\mathcal{T}^t} \text{ es lineal y continua}$$

<u>PRUEBA</u>:

Sea α tal que $\mathcal{C}_\alpha=\mathcal{C}^t$ y β tal que $\mathcal{T}_\beta=\mathcal{T}^t$. Supongamos $\alpha<\beta$

$\Longrightarrow \mathcal{C}_\beta = \mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}^t$. Por 4.2.3, $f : E_\beta \longrightarrow F_\beta$, es lineal y continua

$\Longrightarrow f : E_{\mathcal{C}^t} \longrightarrow F_{\mathcal{T}^t}$ es lineal y continua.

Una consecuencia inmediata de 4.2.4 es

4.2.5 <u>COROLARIO</u>: Sea $(E, \mathcal{C}_E)$ tonelado y $(F, \mathcal{C}_F)$ un e.l.c. Sea $f : E_{\mathcal{C}_E} \longrightarrow F_{\mathcal{C}_F}$ lineal y continua.

Entonces:

$$f : E_{\mathcal{C}_E} \longrightarrow F_{\mathcal{C}_F^t} \text{ es lineal continua.}$$

4.2.6 <u>TEOREMA DE KOMURA</u>: Sea F un e.l.c. T_2. Las siguientes proposiciones son equivalente.

a. Para todo espacio E tonelado y T_2 y toda aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ cuyo gráfico es cerrado es continua.

b. Si $\mathcal{T}$ es una topología l.c. T_2 sobre F tal que $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_F$ entonces $\mathcal{T}^t = \mathcal{T}_F^t$

PRUEBA:

(a) $\Longrightarrow$ (b). Sea $\mathcal{T}$ una topología l.c. y T_2 sobre F tal que $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_F$ entonces $\mathcal{T}^t \leqslant \mathcal{T}_F^t$. (1)

Además:

$1_F : F_{\mathcal{T}^t} \longrightarrow F_{\mathcal{T}}$ es continua.

Por 4.1.8, $1_F : F_{\mathcal{T}^t} \longrightarrow F_{\mathcal{T}_F}$ tiene el gráfico cerrado.

Por (a) 1_F es $\mathcal{T}^t - \mathcal{T}_F$ continua $\Longrightarrow \mathcal{T}^t \geqslant \mathcal{T}_F$ luego

$\mathcal{T}^t \geqslant \mathcal{T}_F^t$ (2)

de (1) y (2) $\mathcal{T}^t = \mathcal{T}_F^t$

(b) $\Longrightarrow$ (a)

Sea $(E, \mathcal{T}_E)$ tonelado y T_2. Sea f tal que

$f : E_{\mathcal{T}_E} \longrightarrow F_{\mathcal{T}_F}$ es lineal y con el gráfico cerrado.

Por 4.1.8 $\exists\ \mathcal{T}$ l.c. y T_2 sobre F y $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_F$ tal que:

$f : E_{\mathcal{T}_E} \longrightarrow F_{\mathcal{T}}$ es lineal y continua.

por 4.2.5; $f : E_{\mathcal{T}_E} \longrightarrow F_{\mathcal{T}^t}$ es continua.

$\Longrightarrow f : E_{\mathcal{T}_E} \longrightarrow F_{\mathcal{T}_F^t}$ es continua; y como $\mathcal{T}_F^t \geqslant \mathcal{T}_F$

$\Longrightarrow$ f es $\mathcal{T}_E - \mathcal{T}_F$ continua.

Sea F un e. vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces F^* el dual algebráico de F es $\sigma(F^*,F)$-completo [1] (Ejemplo 3.2.3, página 188)

4.2.7 DEFINICION: a. Un sub-espacio L de F^* es casi completo si como sub-conjunto lo es. (Definición 1.1.7)

b. Sea L un sub-espacio de F^* definimos el casi-completado de L, denotado por $\tilde{L}$, como la intersección de todos los sub-espacios casi-completos de F^* que contienen a L.

$$\tilde{L} = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

donde $\forall \alpha \in I$, F_α es un sub-espacio $\sigma(F^*,F)$ casi-completo de F^* tal que $F_\alpha \supset L$. Es evidente que $\tilde{L}$ es un sub-espacio casi-completo de F^*.

4.2.8 <u>LEMA</u>: a. Sea F un e.l.c. T_2 y L un sub-espacio de F', entonces $\tilde{L} \cap F'$ está incluído en la $\sigma(F',F)$-cerradura de L.

b. F es un espacio tonelado $T_2 \Longleftrightarrow \tau_F$ es la topología de Mackey $\mathcal{T}(F,F')$ y F' es $\sigma(F^*,F)$ casi-completo.

c. $\widetilde{F'} = F' \Longleftrightarrow \beta(F,F') = \mathcal{T}(F,F')$

d. $\tau_F^t = \mathcal{T}(F,\widetilde{F'}) = \beta(F,\widetilde{F'})$

<u>PRUEBA</u>:

a. Como L es un sub-espacio de $F' \Longrightarrow$ L es sub-espacio de F^* y $\overline{L}^{\sigma(F^*,F)}$ es un sub-espacio cerrado de F^*. Como F^* es completo $\Longrightarrow \overline{L}^{\sigma(F^*,F)}$ es completo $\Longrightarrow \overline{L}^{\sigma(F^*,F)}$ es casi-completo $\Longrightarrow \tilde{L} \subset \overline{L}^{\sigma(F^*,F)}$ $\Longrightarrow \tilde{L} \cap F' \subset \overline{L}^{\sigma(F^*,F)} \cap F' = \overline{L}^{\sigma(F',F)}$

b. Sea F tonelado y $T_2 \Longrightarrow$ F es infra-tonelado y

$T_2 \Longrightarrow \mathcal{C}_F$ es la topología de Mackey $\mathcal{J}(F,F')$ [1] (Proposición 3.6.8, página 218). Además como F es tonelado entonces F' es $\sigma(F',F)$-casi-completo [1] (Página 218). Sea $A \subset F'$, A $\sigma(F^*,F)$ cerrado y acotado $\Longrightarrow A = A \cap F'$ es $\sigma(F',F)$ cerrado y acotado $\Longrightarrow$ A es $\sigma(F',F)$ completo $\Longrightarrow$ A es $\sigma(F^*,F)$ completo. Luego F' es $\sigma(F^*,F)$ casi-completo.

Recíprocamente:

Sea $(F,\mathcal{C}_F)$ un e.l.c. T_2 tal que: $\mathcal{C}_F = \mathcal{J}(F,F')$ y F' es casi-completo, sea T un $\mathcal{C}_F$-tonel $\Longrightarrow T^\circ$ es un disco $\sigma(F',F)$-cerrado; además es $\sigma(F',F)$-acotado, pues T es absorbente.

T° $\sigma(F',F)$-acotado, $\Longrightarrow T^\circ$ es $\sigma(F^*,F)$-acotado $\Longrightarrow \overline{T^\circ}^{\sigma(F^*,F)}$ es compacto [1] (Ejemplo 3.2.3 consecuencia. Página 189). Pero si F' es $\sigma(F^*,F)$-casi-completo $\Longrightarrow \overline{T^\circ}^{\sigma(F^*,F)} \subset F'$ entonces

$$\overline{T^\circ}^{\sigma(F^*,F)} = \overline{T^\circ}^{\sigma(F^*,F)} \cap F' = \overline{T^\circ}^{\sigma(F',F)} = T^\circ$$

Luego T° es un disco $\sigma(F^*,F)$-compacto $\Longrightarrow T^\circ$ es un disco, $\sigma(F',F)$ compacto $\Longrightarrow T^{\circ\circ} = T$ es una vecindad del cero en $\mathcal{J}(F,F') = \mathcal{C}_F \Longrightarrow (F,\mathcal{C}_F)$ es tonelado.

c. Si $\overline{F'} = F' \Longrightarrow \mathcal{J}(F,F')$ es tonelado

Sea $V \in \mathcal{V}(0,\beta(F,F')) \Longrightarrow$ existe A $\sigma(F',F)$-acotado tal que $A^\circ \subset V$. A $\sigma(F',F)$-acotado $\Longrightarrow$ A es $\sigma(F^*,F)$-acotado

$\Longrightarrow$ A es $\sigma(F^*,F)$ relativamente compacto

$\Longrightarrow \overline{A}^{\sigma(F^*,F)}$ es compacto.

Pero F' casi-completo $\Longrightarrow \overline{A}^{\sigma(F^*,F)} = \overline{A}^{\sigma(F',F)} = A^{\circ\circ}$

$\Longrightarrow A^{\circ\circ}$ es un disco $\sigma(F',F)$-compacto

$\Longrightarrow A^{\circ\circ\circ} \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(F,F')$

$\Longrightarrow A^{\circ} \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(F,F')) \Longrightarrow V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(F,F'))$

$\Longrightarrow \beta(F,F') \leqslant \mathcal{T}(F,F') \Longrightarrow \mathcal{T}(F,F') = \beta(F,F')$

Recíprocamente:

Sea T un $\mathcal{T}(F,F')$-tonel $\Longrightarrow$ T es un $\sigma(F,F')$-tonel pues los convexos cerrados son los mismos para las topologías compatibles [11] (Proposición IX-21. Página 190)

$\Longrightarrow T^{\circ\circ}$ es absorbente $\Longleftrightarrow T^{\circ}$ es $\sigma(F',F)$-acotado

$\Longrightarrow T^{\circ\circ} \in \mathcal{V}(0, \beta(F,F')) = \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(F,F'))$

$\Longrightarrow T \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(F,F')) \Longrightarrow \mathcal{T}(F,F')$ es tonelado

por 4.2.8.b $\overline{F'} = F'$

d. Como $F' \subset \overline{F'} \subset F^*$, y, $(F,F^*,\langle\ \rangle)$ es un sistema dual

por 1.3.19 $\mathcal{C}_F \leqslant \mathcal{T}(F,F') \leqslant \mathcal{T}(F,\overline{F'}) \Longrightarrow \mathcal{C}_F^t \leqslant \mathcal{T}(F,\overline{F'})$

Además:

$\mathcal{C}_F \leqslant \mathcal{C}_F^t \Longrightarrow F' = (F,\mathcal{C}_F)' \subseteq (F,\mathcal{C}_F^t)' \Longrightarrow \overline{F'} \subset (F,\mathcal{C}_F^t)'$

$\Longrightarrow \mathcal{C}_F^t = \mathcal{T}(F,(F_{\mathcal{C}_F^t})') \geqslant \mathcal{T}(F,\overline{F'}) \Longrightarrow \mathcal{C}_F^t = \mathcal{T}(F,\overline{F'})$

y por (c) $\mathcal{C}_F^t = \mathcal{T}(F,\overline{F'}) = \beta(F,\overline{F'})$

4.2.9 <u>TEOREMA ADASCH-VALDIVIA:</u> Las afirmaciones siguientes son equivalente:

a. <u>ADASCH:</u> Para todo sub-espacio vectorial L de F' que es $\sigma(F',F)$-denso en $F' \Longrightarrow \overline{L} \supset F'$

b. <u>VALDIVIA</u>: Para todo sub-espacio vectorial casi-completo L de F^* tal que $L \cap F'$ es $\sigma(F',F)$-denso en $F' \Longrightarrow L \supset F'$.

<u>PRUEBA</u>:

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sea L un s.e. de F^* casi-completo tal que $L \cap F'$ es $\sigma(F',F)$-denso en F'.

$L \supset L \cap F' \Longrightarrow L \supset \overline{L \cap F'}$.

Como $\overline{L \cap F'}^{\sigma(F',F)} = F'$ por (a) $\overline{L \cap F'} \supset F' \Longrightarrow L \supset F'$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sea L un sub-espacio de F'; tal que L es $\sigma(F',F)$ denso en F'. Ahora bien $\overline{L}$: es un s.e. casi-completo de F^*.

$L \subset \overline{L} \cap F' \subset F' \Longrightarrow F' = \overline{L}^{\sigma(F',F)} \subset \overline{\overline{L} \cap F'}^{\sigma(F',F)}$

Pero $\overline{\overline{L} \cap F'}^{\sigma(F',F)} \subset \overline{F'}^{\sigma(F',F)} = F' \Longrightarrow \overline{\overline{L} \cap F'}^{\sigma(F',F)} = F'$

Por (b) $\overline{L} \supset F'$

Observemos en (a) que $\overline{L} \supset F' \Longrightarrow \overline{L} \cap F' = F' = \overline{L}^{\sigma(F',F)}$

Vamos a mostrar ahora que las proposiciones de 4.2.6. y 4.2.9 son equivalentes; para esto necesitamos el siguiente lema.

4.2.10 <u>LEMA</u>: L es $\sigma(F',F)$-denso en $F' \Longleftrightarrow (F,L,\langle\ \rangle)$ es separante en $F \Longleftrightarrow \sigma(F,L)$ es T_2.

<u>PRUEBA</u>:

L es $\sigma(F',F)$-denso en $F' \Longleftrightarrow L^{\perp\perp} = F' \Longleftrightarrow L^{\perp} = \{0\}$ [1] (Proposición 3.3.3 Página 193). $L^{\perp} = 0 \Longleftrightarrow (F,L,\langle\ \rangle)$

es separante en $F \Longleftrightarrow \sigma(F,L)$ es T_2. [11] (Proposición IX-19-3. Página 186)

4.2.11 PROPOSICION: Sea $(F,\mathcal{T}_F)$ un e.l.c. T_2. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

a. Si $\mathcal{T}$ es una topología l.c. T_2 sobre F

$\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_F \Longrightarrow \mathcal{T}^t = \mathcal{T}_F^t$

b. ADASCH: Para todo sub-espacio vectorial L de F', $\sigma(F',F)$-denso en $F' \Longrightarrow \overline{L} \supset F'$.

PRUEBA:

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sea L un s.e. $\sigma(F',F)$-denso de F'.

4.2.10 $\Longrightarrow \mathcal{T} = \sigma(F,L)$ es una topología l.c. T_2 sobre F ; y $\sigma(F,L) \leqslant \sigma(F,F')$, pues $L \subset F'$. Por (a)

$\mathcal{T}^t = \mathcal{T}_F^t$

4.2.8.d $\Longrightarrow \mathcal{T}^t = \mathcal{J}(F,\overline{L}) = \mathcal{J}(F,\overline{F'}) = \mathcal{T}_F^t$

$\Longrightarrow (F,\mathcal{T}^t)' = (F,\mathcal{T}_F^t)' \Longrightarrow \overline{L} = \overline{F'} \Longrightarrow \overline{L} \supset F'$

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sea $\mathcal{T}$ una topología l.c. T_2, sobre F, menos fina que $\mathcal{T}_F$. Sea $L = (F,\mathcal{T})'$, $\Longrightarrow$ L es un sub-espacio vectorial de F'. Por otro lado $\mathcal{T}_F$ Hausdorff $\Longrightarrow (F,F',\langle\ \rangle)$ es un sistema dual [11] (Ejemplo IX-2. Página 179) $\Longrightarrow (F,L,\langle\rangle)$ es un sistema dual, y por lo tanto separante en F. Por 4.2.10 L es $\sigma(F',F)$-denso en F' por (b) $\overline{L} \supset F' \Longrightarrow \overline{L} \supset \overline{F'}$; pero $L \subset F' \Longrightarrow \overline{L} \subset \overline{F'}$

Luego $\overline{L} = \overline{F'}$. Por 4.2.8.d. $\mathcal{T}^t = \mathcal{J}(F,\overline{L}) = \mathcal{J}(F,\overline{F'}) = \mathcal{T}_F^t$

De 4.2.11 se sigue:

4.2.12 <u>TEOREMA DE ADASCH-KOMURA-VALDIVIA</u>: Sea (F,τ_F) un e.l.c. T_2. Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:

a. Para todo espacio E tonelado y T_2, y toda aplicación lineal f. $f : E \longrightarrow F$ cuyo gráfico es cerrado, es continua.

b. Si τ es una topología l.c. T_2 sobre F: $\tau \leq \tau_F \Longrightarrow \tau_F^t = \tau^t$.

c. Para todo sub-espacio L de F' $\sigma(F',F)$-denso en $F' \Longrightarrow \overline{L} \supset F'$.

d. Para todo sub-espacio L casi-completo de F* tal que $L \cap F'$ es $\sigma(F',F)$-denso en $F' \Longrightarrow L \supset F'$.

Basándonos en 4.2.12 probaremos el teorema del gráfico cerrado para espacios Infra-Ptak.

4.2.13 <u>LEMA</u>: Sea (F,τ) un e.l.c. T_2, Sea $V(F',F)$ la topología más fina sobre F' que induce sobre toda parte equicontinua de F', la misma topología que induce $\sigma(F',F)$. Sea L sub-conjunto de F'. Entonces L es $V(F',F)$ cerrado $\Longleftrightarrow$ [Para todo disco $\sigma(F',F)$ cerrado y equi-continuo $B \subset F' \Longrightarrow L \cap B$ es $\sigma(F',F)$--cerrado]

<u>PRUEBA</u>:

Si L es $V(F'F)$ cerrado $\Longrightarrow L \cap B$ es cerrado en B para la topología $V(F',F)/_B$. Como $V(F',F)$ y $\sigma(F',F)$

inducen sobre B la misma topología $\Longrightarrow L \cap B$ es $\sigma(F',F)/_B$ cerrado; pero B $\sigma(F',F)$-cerrado $\Longrightarrow L \cap B$ es $\sigma(F',F)$-cerrado.

Recíprocamente:

Supongamos que para todo disco B, $\sigma(F',F)$-cerrado y equicontinuo se tiene que $L \cap B$ es $\sigma(F',F)$ cerrado. Sea N un sub-conjunto arbitrario equicontinuo de F', entonces $B = N^{\circ\circ}$ es un disco $\sigma(F',F)$-cerrado y también es equicontinuo [1] (Proposición 3.4.6. Página 200).

Además:

$$L \cap N = L \cap (B \cap N) = (L \cap B) \cap N$$

como $L \cap B$ es $\sigma(F',F)$-cerrado $\Longrightarrow L \cap N$ es cerrado en N para la topología inducida sobre N por $\sigma(F',F)$. Entonces $C_N(L \cap N) = L^c \cap N$ es abierto en N para la topología inducida sobre N por $\sigma(F',F) \Longrightarrow L^c \in V(F',F)$ [1] (Proposición 3.10.1. Página 243)

$\Longrightarrow$ L es $V(F',F)$-cerrado en F'.

4.2.14 <u>DEFINICION</u>: F es un espacio Infra-Ptak (Br-completo), si todo sub-espacio M de F', $V(F',F)$-cerrado y $\sigma(F',F)$ denso en F' $\Longrightarrow M = F'$,

Resulta interesante observar que:

1. Todo Frechet es Infra-Ptak, y
2. Todo Infra-Ptak es completo. [1] (Proposición 3.17.3. Pág. 299)

4.2.15 <u>TEOREMA DEL GRAFICO CERRADO</u> (Ptak-W.Robertson:

Si E es tonelado y T_2; y F un Infra-Ptak $\Longrightarrow$ toda aplicación lineal $F : E \longrightarrow F$
con el gráfico cerrado es continua.

<u>PRUEBA</u>:

Por las equivalencias de 4.2.12. Probaremos que se verifica la parte d.

Sea L un sub-espacio casi-completo de F* tal que $M = L \cap F'$ es $\sigma(F',F)$-denso en F', debemos probar que $L \supset F'$. Para esto probaremos primero que M es $V(F',F)$-cerrado: Sea B un disco equicontinuo $\sigma(F',F)$-cerrado de F'. Por el teorema de Alaoglu-Bourbaki [1] (Teorema 3.4.1. Página 201) B es un disco $\sigma(F',F)$-compacto y por lo tanto $\sigma(F',F)$-acotado.

$M \cap B = (L \cap F') \cap B = L \cap (F' \cap B) = L \cap B.$

Como $L \cap B$ es $\sigma(F',F)$-acotado y L es casi-completo

$\Longrightarrow \overline{L \cap B}^{\sigma(F',F)} \subset L \Longrightarrow \overline{L \cap B}^{\sigma(F',F)} \subset L \cap B$

Es decir $\overline{L \cap B}^{\sigma(F',F)} = L \cap B \Longrightarrow M \cap B$ es $\sigma(F',F)$-cerrado

$\Longrightarrow$ M es $\sigma(F',F)$-cerrado y M es $V(F',F)$-cerrado

Como F es un Infra-Ptak $\Longrightarrow M = F' \Longrightarrow L \cap F' = F'$

$\Longrightarrow L \supset F'$.

Como se verifica 4.2.8.d entonces se verifica 4.2.8.a; es decir f es continua.

4.3 ALGUNAS EQUIVALENCIAS DEL TEOREMA DEL GRAFICO CERRADO EN ESPACIOS BORNOLOGICOS.

El tema que desarrollaremos en esta sección es parecido al de la sección 4.2; en este caso con espacios bornológicos.

Ses $(F, \mathcal{T}_F)$ un e.l.c. T_2. La topología l.c. más fina sobre F, es bornológica, pues todo disco bornívoro es un disco absorbente.

PROPOSICION 4.3.1: Sea $(F, \mathcal{T}_F)$ un e.l.c. T_2. Sea $\mathcal{T}'$ la topología sobre F, que tiene al conjunto:

$$\mathcal{B} = \left\{ D \subset F / D \text{ es un disco } \mathcal{T}_F \text{ - bornívoro} \right\}$$

como una base del filtro de vecindades del cero. Entonces.

a. $\mathcal{T}_F \leqslant \mathcal{T}'$

b. Los acotados para $\mathcal{T}_F$ y $\mathcal{T}'$ son los mismos.

c. $(F, \mathcal{T}')$ es un espacio bornológico

d. $\mathcal{T}'$ es la topología más fina sobre F entre todas las topologías sobre F, que tienen los mismos acotados.

e. $\mathcal{T}'$ es la menos fina entre todas las topologías bornológicas más fina que $\mathcal{T}_F$.

<u>PRUEBA</u>:

a. Sea $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F)$, como $\mathcal{T}_F$ tiene una base de discos $\Longrightarrow \exists U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F)$, U disco tal que $U \subset V$, pero $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F) \Longrightarrow U$ es $\mathcal{T}_F$-bornívoro $\Longrightarrow U \in \mathcal{B}$ $\Longrightarrow V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}') \Longrightarrow \mathcal{T}_F \leqslant \mathcal{T}'$

b. Como $\mathcal{T}_F \leq \mathcal{T}' \Longrightarrow A(\mathcal{T}') \subseteq A(\mathcal{T}_F)$. Por otro lado sea $A \in A(\mathcal{T}_F)$, y sea $W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}') \Longrightarrow \exists\, D \in \mathcal{B} / D \subset W$ pero D $\mathcal{T}_F$-bornívoro $\Longrightarrow \exists\, \alpha > 0 / \forall |\lambda| \geq \alpha \quad A \subseteq \lambda D \subset \lambda W$ $\Longrightarrow A(\mathcal{T}_F) \subset A(\mathcal{T}')$; Por lo tanto $A(\mathcal{T}_F) = A(\mathcal{T}')$

c. Sea $V \subset F$, un disco $\mathcal{T}'$-bornívoro por (b), V es un disco $\mathcal{T}_F$-bornívoro $\Longrightarrow V \in \mathcal{B} \Longrightarrow V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}') \Longrightarrow (F, \mathcal{T}')$ es bornológico.

d. Sea $(F, \mathcal{T}'')$ un e.l.c. tal que $A(\mathcal{T}_F) = A(\mathcal{T}'')$ y $\mathcal{T}'' \geq \mathcal{T}'$.

Sea $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}'')$, un disco $\Longrightarrow$ V absorbe a todo $A \in A(0, \mathcal{T}'') = A(\mathcal{T}') \Longrightarrow$ V absorbe a todo $A \in A(\mathcal{T}')$ $\Longrightarrow$ V es un disco $\mathcal{T}'$-bornívoro $\Longrightarrow V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}')$, pues $(F, \mathcal{T}')$ es un e.l.c. bornológico $\Longrightarrow \mathcal{T}' \geq \mathcal{T}''$. Por lo tanto $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}'$. Es decir $\mathcal{T}'$ es la topología l.c. más fina sobre F entre las topologías l.c. sobre F, que tiene los mismos acotados que $\mathcal{T}_F$.

e. Sea $\mathcal{T}''$ una topología sobre F tal que $(F, \mathcal{T}'')$ es bornológico y $\mathcal{T}'' \geq \mathcal{T}_F$. Sea $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}') \Longrightarrow \exists\, D \in \mathcal{B}$ tal que:

$D \subset V$. Como $A(\mathcal{T}'') \subset A(\mathcal{T}_F) \Longrightarrow$ D es $\mathcal{T}''$-bornívoro $\Longrightarrow$ D es $\mathcal{T}''$-bornívoro $\Longrightarrow D \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}'') \Longrightarrow V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}'')$

$\mathcal{T}'' \geq \mathcal{T}'$

4.3.2 <u>DEFINICION</u>: Sea $(F, \mathcal{T}_F)$ un e.l.c. T_2, llamaremos la topología bornológica asociada a $\mathcal{T}_F$, denotada por $\mathcal{T}_F^B$, a la topología bornológica sobre F menos fina, entre todas las topologías bornológicas más finas que $\mathcal{T}_F$. La topología $\mathcal{T}_F^B$ es la topología $\mathcal{T}'$ obtenida en 4.3.1. Es una consecuencia de 4.3.1 que $A(\mathcal{T}_F^B) = A(\mathcal{T}_F)$.

4.3.3 <u>PROPOSICION</u>: Sea $(E,\mathcal{T}_E)$ bornológico y $(F,\mathcal{T}_F)$ un e.l.c. T_2, sea $f : E_{\mathcal{T}_E} \longrightarrow F_{\mathcal{T}_F}$ lineal y continua. Entonces $f : E_{\mathcal{T}_E} \longrightarrow F_{\mathcal{T}_F^B}$ es lineal y continua.

<u>PRUEBA</u>:

Sea $V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F^B) \Longrightarrow \exists D$ $\mathcal{T}_F$-bornívoro, tal que $D \subset V$, sea $A \in A(\mathcal{T}_E)$, como f es $\mathcal{T}_E$-$\mathcal{T}_F$ continua

$\Longrightarrow f(A) \in A(\mathcal{T}_F) \Longrightarrow \exists \alpha > 0 : \forall |\lambda| \geq \alpha$ es $f(A) \subseteq \lambda D$

$\Longrightarrow A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\lambda D) = \lambda f^{-1}(D)$

$\Longrightarrow f^{-1}(D)$ es $\mathcal{T}_E$-bornívoro $\Longrightarrow f^{-1}(D) \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E)$

$\Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E) \Longrightarrow$ f es $\mathcal{T}_E$-$\mathcal{T}_F^B$ continua.

4.3.4 <u>PROPOSICION</u>: Sea F un e.l.c. T_2. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. Para todo espacio normable E, toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

b.- Para todo espacio E bornológico y T_2, toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

c. Para cada topología $\mathcal{T}$ l.c. T_2 sobre F, menos fina que $\mathcal{T}_F$, sus respectivas topologías bornológicas asociados $\mathcal{T}^B$ y $\mathcal{T}_F^B$ son iguales, es decir $\mathcal{T}^B = \mathcal{T}_F^B$.

PRUEBA:

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sea E bornológico y T_2. Sea f una aplicación lineal de E en F con el gráfico cerrado. Todo espacio bornológico y T_2 es el límite inductivo de espacios normables [1] (Proposición 3.7.6. Página 223). Sea la familia de espacios normables $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ y $(f_i)_{i \in I}$ la familia de aplicaciones lineales tales que E es él límite inductivo de $(E_i)_{i \in I}$: Como f de E en F tiene el gráfico cerrado y $\forall i \in I, f_i$ de E_i en E es continua. Por 2.1.5 $g_i = f \circ f_i$ de E_i en F tiene el gráfico cerrado. Por (a) $\forall i \in I$, $g_i : E_i \longrightarrow F$ es continua. Por 3.1.7 f es continua.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Sea τ una topología l.c. y T_2 sobre F, menos fina que τ_F. Entonces:

$\tau \leqslant \tau_F \Longrightarrow \tau^B \leqslant \tau_F^B$ (1).

Sea I_F la idéntica en F, entonces:

$I_F : F_\tau \longrightarrow F_\tau$ es lineal y continua. Por 4.1.8

$I_F : F_\tau \longrightarrow F_{\tau_F}$ tiene el gráfico cerrado.

$\tau \leqslant \tau^B \Longrightarrow I_F : F_{\tau^B} \longrightarrow F_\tau$ es lineal y continua.

Por 2.1.5 $I_F : F_{\tau^B} \longrightarrow F_{\tau_F}$ tiene el gráfico cerrado.

Por (b)

$I_F : F_{\tau^B} \longrightarrow F_{\tau_F}$ es continua. Por 4.3.3.

$I_F : F_{\tau^B} \longrightarrow F_{\tau_F^B}$ es continua $\Longrightarrow \tau^B \geqslant \tau_F^B$ (2)

(1) y (2) $\Longrightarrow \tau^B = \tau_F^B$

(c) $\Longrightarrow$ (a): Sea E normable y $f : E \longrightarrow F_{\tau_F}$ lineal y con el gráfico cerrado. Por 4.1.8. Existe una topología l.c. T_2 sobre $F, \tau \leq \tau_F$ tal que: $f: E \longrightarrow F_\tau$ es lineal y continua.

Como E es normable, es bornológico. Por 4.3.3.

$f : E \longrightarrow F_{\tau^B}$ es lineal y continua. Por (c) $\tau^B = \tau_F^B$. Luego:

$f : E \longrightarrow F_{\tau_F^B}$ es lineal y continua, como $\tau_F^B \geq \tau_F \Longrightarrow$

$f : E \longrightarrow F_{\tau_F}$ es lineal y continua.

A continuación, vamos a obtener unas proposiciones equivalente a las tres de 4.3.4.

4.3.5 <u>PROPOSICION</u>: Sea (F, τ_F) un e.l.c. T_2 y τ una topología l.c. T_2 $\tau \leq \tau_F$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalente:

a. $\tau^B = \tau_F^B$

b. $A(\tau) = A(\tau_F)$

<u>PRUEBA</u>:

(a) $\Longrightarrow$ (b): Por 4.3.1.b $A(\tau) = A(\tau^B)$ y $A(\tau_F) = A(\tau_F^B)$

$\tau^B = \tau_F^B \Longrightarrow A(\tau) = A(\tau_F)$

(b) $\Longrightarrow$ (a): $\tau \leq \tau_F \Longrightarrow \tau^B \leq \tau_F^B$ (1)

Además. Sea $V \in \mathcal{V}(0, \tau_F^B)$ un disco $\Longrightarrow$ V absorbe a todo τ_F-acotado $\Longrightarrow$ V absorbe a todo τ-acotado. Por 4.3.1.b V absorbe a todo τ^B-acotado $\Longrightarrow V \in \mathcal{V}(0, \tau^B)$

$\Longrightarrow \tau_F^B \leq \tau^B$ (2)

por (1) y (2) $\tau^B = \tau_F^B$.

Observemos que 4.3.5.a es 4.3.4.c, luego 4.3.5.b es equivalente a todas las proposiciones de 4.3.4.

4.3.6 DEFINICION: Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c. T_2. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E, x_n converge a 0 en el sentido de Mackey ($x_n \xrightarrow{\text{MACKEY}} 0$), si existe un disco $\mathcal{T}$-acotado A de E, tal que x_n converge a 0 en el espacio normado (E_A, q_A); donde $E_A = \bigcup_{n\geq 1} nA$ y q_A es la gauge de A. (Si A es absorbente $E_A = E$).

4.3.7 LEMA: Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c. T_2 y $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en E. Entonces:

$x_n \xrightarrow{\text{MACKEY}} 0 \Longleftrightarrow \exists (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$; $\lambda_n \longrightarrow +\infty$
tal que $\lambda_n x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$.

PRUEBA:

$(\Longrightarrow)$ Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ t.q. $x_n \xrightarrow{\text{MACKEY}} 0 \Longrightarrow \exists$ A disco $\mathcal{T}$-acotado tal que $q_A(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}} 0 \Longrightarrow \forall n\geq 1, \exists \rho_n > 0 /$ $q_A(x_n) \leq \frac{1}{\rho_n}$; la sucesión ρ_n, puede ser escogida tal que $\rho_n \longrightarrow +\infty$. Ahora bien

$q_A(x_n) \leq \frac{1}{\rho_n} \Longleftrightarrow \rho_n x_n \in A$, luego $\forall V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T})$, V equilibrado, $\exists\, \alpha > 0$ tal que:

$\forall n \geq 1 \quad \rho_n x_n \subset \frac{1}{\alpha} V \Longrightarrow (\alpha\rho_n) x_n \subset V, \forall n \geq 1$

Sea $\lambda_n = \alpha\rho_n, \Longrightarrow \lambda_n x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ con $\lambda_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}} +\infty$

Recíprocamente:

Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$. Sea $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$\lambda_n x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$; y $\lambda_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}} +\infty$

Sea $U \in \mathcal{V}(0,\tau)$, U un disco τ-acotado.

$\Longrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0$ es $\lambda_n x_n \in U \Longleftrightarrow x_n \in \frac{1}{\lambda_n} U \;\forall n \geq n_0$

$\Longleftrightarrow q_U(x_n) \leq \frac{1}{\lambda_n},\; \forall n \geq n_0)$ pero $\lambda_n \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} +\infty \Longrightarrow \frac{1}{\lambda_n} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} 0$

$\Longrightarrow q_U(x_n) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} 0 \Longrightarrow x_n \xrightarrow{\text{MACKEY}} 0.$

4.3.8 <u>COROLARIO</u>: Toda sucesión que converge a cero en el sentido de Mackey, converge a cero en el sentido usual de τ.

<u>PRUEBA</u>:

$x_n \xrightarrow{\text{MACKEY}} 0 \Longleftrightarrow \exists (\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ tal que. $\lambda_n \longrightarrow +\infty$

y $\lambda_n x_n \xrightarrow{\tau} 0 \Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(0,\tau)$, U equilibrado

$\exists n_0 / \forall n \geq n_0 \;\; \lambda_n > 1$, y, $\lambda_n x_n \in U \Longleftrightarrow x_n \in \frac{1}{\lambda_n} U \subset U$

$\Longrightarrow x_n \xrightarrow{\tau} 0$

4.3.9 <u>PROPOSICION</u>: Sean (E,τ_E) y (F,τ_F) dos e.l.c. T_2. Sea $f : E \longrightarrow F$ lineal. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. f transforma acotados en acotados.

b. f transforma sucesiones que convergen a cero en el sentido de Mackey en E, en sucesiones acotadas en F.

<u>PRUEBA</u>:

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sea $(x_n)_{n \geq 1} \subset E$ tal que $x_n \xrightarrow{\text{MACKEY}} 0$ por 4.3.8 $x_n \xrightarrow{\tau_E} 0$, luego $(x_n)_{n \geq 1}$ es acotada. Por (a) $f((x_n)_{n \geq 1}) = (f(x_n))_{n \geq 1}$ es una sucesión acotada en F.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sea B τ_E-acotado, y supongamos que

$f(B)$ no es $\mathcal{T}_F$-acotado $\Longrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_F)$ tal que $\forall n \geq 1$ $f(B) \not\subset n^3 V$, $\forall n \geq 1$, sea $x_n \in B$ tal que $f(x_n)$

$f(x_n) \not\in n^3 V \Longrightarrow f(\frac{x_n}{n^3}) \not\in V$.

Ahora bien, para cada $n \geq 1$ sea $\lambda_n = n$

$\Longrightarrow \lambda_n \xrightarrow{\mathcal{T}_R} +\infty$ y $\lambda_n \frac{x_n}{n^3} = \frac{x_n}{n^2} \xrightarrow{\mathcal{T}_E} 0$

pues como B es $\mathcal{T}_E$-acotado $\forall U \in \mathcal{V}(0,\mathcal{T}_E)$ U equilibrada, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0$ es $B \subset n^2 U \Longrightarrow \forall n \geq n_0$ es $\frac{x_n}{n^2} \in U \Longleftrightarrow \frac{x_n}{n^2} \xrightarrow{\mathcal{T}_E} 0$. Luego $\frac{x_n}{n^3} \xrightarrow{\text{MACKEY}} 0$, pero $f((\frac{x_n}{n^3}))$ no es $\mathcal{T}_F$-acotada, lo cual contradice (b).

4.3.10 <u>PROPOSICION</u>: Sea $(F,\mathcal{T}_F)$ un e.l.c. T_2 y $\mathcal{T}$ una topología l.c. T_2; $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_F$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

a. $A(\mathcal{T}) = A(\mathcal{T}_F)$

b. Toda sucesión que converge hacia 0 en el sentido de Mackey para $\mathcal{T}$, es acotada para $\mathcal{T}_F$.

<u>PRUEBA</u>:

(a) $\Longrightarrow$ (b): Sea $I_F : F_{\mathcal{T}} \longrightarrow F_{\mathcal{T}_F}$; por (a) I_F manda acotados en acotados. Por 4.3.9 toda sucesión que converge hacia 0 en el sentido de Mackey para $\mathcal{T}$, es $\mathcal{T}_F$-acotada.

(b) $\Longrightarrow$ (a): $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_F \Longrightarrow A(\mathcal{T}_F) \subset A(\mathcal{T})$ (1)

Por otro lado sea:

$I_F : F_{\mathcal{T}} \longrightarrow F_{\mathcal{T}_F}$ por la hipótesis (b) y 4.3.9 I_F

envia $\mathcal{T}$-acotados en $\mathcal{T}_F$ acotados $\Longrightarrow A(\mathcal{T}) \subset A(\mathcal{T}_F)$ (2)

(1) y (2) $\Longrightarrow$ $A(\mathcal{T}) = A(\mathcal{T}_F)$. Luego 4.3.10.b es equivalente a todas las proposiciones de 4.3.4. Vamos ahora a enunciar las equivalencias que hemos ganado, más otras que probaremos en la siguiente proposición.

4.3.11 PROPOSICION: Sea $(F, \mathcal{T}_F)$ un e.l.c. T_2. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. Para todo espacio normable E, toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

b. Para todo espacio E bornológico y T_2, toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

c. Para cada topología l.c. T_2 $\mathcal{T}$ sobre F, $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_F$ $\Longrightarrow \mathcal{T}^B = \mathcal{T}_F^B$.

d. Para cada topología l.c. T_2 $\mathcal{T}$ sobre F, $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_F$ $\Longrightarrow A(\mathcal{T}) = A(\mathcal{T}_F)$.

e. Para cada topología l.c. T_2 $\mathcal{T}$ sobre F, $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_F$ $\Longrightarrow$ Toda sucesión que converge a 0 en el sentido de Mackey para $\mathcal{T}$, es acotada para $\mathcal{T}_F$.

f. Para todo espacio E, l.c. y T_2. Toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado transforma las sucesiones convergentes a 0 en el sentido de Mackey en E en sucesiones acotadas en F.

g. Sea L un sub-espacio de F', $\sigma(F',F)$ denso en F', entonces todo sub-conjunto B de F tal que f(B) es acotado para toda $f \in L$ implica que f(B) es acotado para toda $f \in F'$.

h. Para cada sub-espacio L de F'; $\sigma(F',F)$ denso en F', y para cada $T \subset L$, $\sigma(L,F)$-tonel en L, la $\sigma(F',F)$ clausura de T es un $\sigma(F',F)$-tonel.

PRUEBA:

Las equivalencias entre a,b,c,d y e, y a fueron probadas en 4.3.4; 4.3.5; y 4.3.10.

Probaremos que (b) $\Longleftrightarrow$ (f).

(f) $\Longrightarrow$ (b): (f) $\Longrightarrow$ (e); pues (e) es un caso particular de (f) y (e) $\Longrightarrow$ (b). Luego (f) $\Longrightarrow$ (b).

(b) $\Longrightarrow$ (f). Sea $(E,\mathcal{T}_E)$ un e.l.c. T_2 y $f:E_{\mathcal{T}_E} \longrightarrow F_{\mathcal{T}_F}$ lineal y con el gráfico cerrado. Por 2.1.5

$\mathcal{T}_E^B \geqslant \mathcal{T}_E \Longrightarrow f : E_{\mathcal{T}_E^B} \longrightarrow F_{\mathcal{T}_F}$ tiene el gráfico cerrado. Por (b); f es continua. Luego f manda $\mathcal{T}_E^B$-acotados en $\mathcal{T}_F$-acotados; pero por 4.3.1. $A(\mathcal{T}_E^B) = A(\mathcal{T}_E)$ $\Longrightarrow$ f manda $\mathcal{T}_E$-acotados en $\mathcal{T}_F$-acotados. Por 4.3.9, f transforma sucesiones que convergen a cero en el sentido de Mackey; en sucesiones acotadas en F.

Ahora probaremos que d $\Longleftrightarrow$ g.

(d) $\Longrightarrow$ (g): Sea L un sub-espacio de F', $\sigma(F',F)$ denso en F'. Por 4.2.10 $\mathcal{T}=\sigma(F,L)$ es un e.l.c. T_2 y $L \subset F' \Longrightarrow \mathcal{T} = \sigma(F,L) \leqslant \sigma(F,F') \leqslant \mathcal{T}_F$. Por (d).
$A(\mathcal{T}) = A(\mathcal{T}_F)$.

Sea $B \subset F$ tal que $\forall f \in L$ $f(B)$ es $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$-acotado $\Longleftrightarrow$ $\forall f \in L;\ \exists \lambda > 0$ tal que $\sup\limits_{x \in B} |f(x)| \leq \lambda \Longleftrightarrow B \in A(\sigma(F,L)) =$ $A(\mathcal{T}) = A(\mathcal{T}_F)$

$\Longrightarrow \forall f \in F'$ $f(B)$ es $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$-acotado

(g) $\Longrightarrow$ (d). Sea $\mathcal{T}$ una topología l.c. T_2 sobre F $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_F$.

Entonces $A(\mathcal{T}_F) \subset A(\mathcal{T})$. (1).

Por otro lado: Sea $L = (F,\mathcal{T})' \subset F' \Longrightarrow (F,L,<>)$ es un sistema separante en $F \Longleftrightarrow L$ es $\sigma(F',F)$ denso en F'.

Sea $B \in A(\mathcal{T}) \Longrightarrow \forall f \in L$ $f : F_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y continua $\Longrightarrow f(B) \in A(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ $\forall f \in L$. Por (g) $f(B) \in A(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ $\forall f \in F' \Longrightarrow B$ es $\sigma(F,F')$-acotado, pero como $\sigma(F,F')$ y $\mathcal{T}_F$ son compatibles $A(\sigma(F,F')) = A(\mathcal{T}_F) \Longrightarrow B \in A(\mathcal{T}_F)$ $\Longrightarrow A(\mathcal{T}) \subset A(\mathcal{T}_F)$ (2)

Por (1) y (2) $A(\mathcal{T}) = A(\mathcal{T}_F)$.

Por último probaremos que (d) $\Longleftrightarrow$ (h).

(d) $\Longrightarrow$ (h): Sea L un sub-espacio de F' $\sigma(F',F)$-denso en F', entonces $\mathcal{T} = \sigma(F,L)$ es una topología l.c. T_2 sobre F y $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_F$.

Por (d) $A(\sigma(F,L)) = A(\mathcal{T}) = A(\mathcal{T}_F) = A(\sigma(F,F'))$ (1)

Si $A \subset F$, indicaremos por A° su polar en L y por $A^{\bullet}$ su polar en F'.

Sea T un $\sigma(L,F)$-tonel $\Longrightarrow T^{\circ} = T^{\bullet}$

$\Longrightarrow T^{\circ\bullet} = T^{\bullet\bullet} = \overline{T}^{\sigma(F',F)}$. Probaremos que $T^{\circ\bullet}$ es absorbente en F'. T $\sigma(L,F)$-tonel $\Longrightarrow T = T^{\circ\circ}$ $\Longrightarrow T = T^{\circ\circ}$ es absorbente en $L \Longrightarrow T^{\circ}$ es $\sigma(F,L)$-acotado, por (1) T° es $\sigma(F,F')$-acotado $\Longrightarrow T^{\circ\bullet}$ es absorbente en $F' \Longrightarrow T^{\circ\bullet} = T^{\bullet\bullet}$ es un disco absorbente en F' $\sigma(F',F)$-cerrado $\Longrightarrow \overline{T}^{\sigma(F',F)}$ es un $\sigma(F',F)$-tonel

(h) $\Longrightarrow$ (d): Sea $\mathcal{T}$ una topología l.c. y T_2 sobre F; $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_F \Longrightarrow A(\mathcal{T}_F) \subset A(\mathcal{T})$ (1)

Sea $L = (F,\mathcal{T})' \Longrightarrow (F,L,< >)$ es separante en F

Por 4.2.10 L es $\sigma(F',F)$-denso en F'.

Sea $A \in A(\mathcal{T}) \Longrightarrow A^{\circ}$ es un disco absorbente en L $\sigma(L,F)$-cerrado $\Longrightarrow A^{\circ}$ es un $\sigma(L,F)$-tonel $\Longrightarrow \overline{A^{\circ}}^{\sigma(F',F)} = A^{\circ\bullet\bullet}$ es un $\sigma(F',F)$-tonel $\Longrightarrow A^{\circ\bullet\bullet}$ es absorbente en $F' \Longleftrightarrow A^{\circ\bullet}$es $\mathcal{T}_F$-acotado

pero $A \subset A^{\circ\bullet} \Longrightarrow A$ es $\mathcal{T}_F$-acotado $\Longrightarrow A(\mathcal{T}) \subset A(\mathcal{T}_F)$ (2)

Por (1) y (2) $A(\mathcal{T}) = A(\mathcal{T}_F)$.

Una aplicación de 4.3.11 la damos en el siguiente ejemplo:

4.3.12 <u>EJEMPLO</u>: Sea $F = \mathcal{C}([0,1])$ el espacio lineal de las funciones continuas definidas en $[0,1]$ con valor real provisto de la topología $\mathcal{T}_F$ de la convergencia uniforme (La topología definida por la norma $\| \|_\infty$; $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Entonces $(F,\mathcal{T}_F)$ es una e.l.c. T_2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función triangular f_n.

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{2n}\ x & 0 \leqslant x \leqslant 2^{-n} \\ 2^n(2-2^n x) & 2^{-n} \leqslant x \leqslant 2^{1-n} \\ 0 & 2^{1-n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Entonces $\forall\, n \geqslant 1$ f_n es continua, es decir $f_n \in F = \mathcal{C}[0,1]$; para todo n, f_n tiene un máximo, que ocurre en $x = 2^{-n}$ e igual a $f(2^{-n}) = 2^n$ y es cero para $2^{1-n} \leqslant x \leqslant 1$.

Veamos la gráfica de una de ellas.

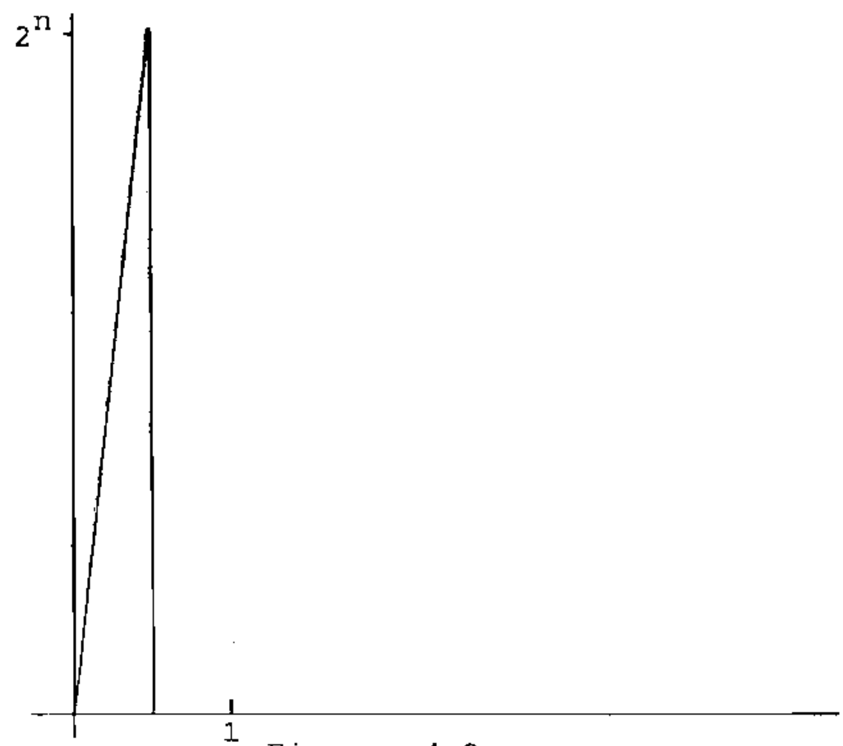

Figura 4.2

La sucesión $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge a cero en el sentido de Mackey para la topología $\sigma(F,F')$, es decir la topología de la convergencia puntual.

Sea $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda_n \longrightarrow +\infty$

$\lambda_n f_n$ es la sucesión definida por:

$$\lambda_n f_n(x) = \begin{cases} \lambda_n 2^n x & 0 \leqslant x \leqslant 2^{-n} \\ \lambda_n 2^n(2-2^n x), & 2^{-n} \leqslant x \leqslant 2^{1-n} \\ 0 & 2^{1-n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n f_n$ es la aplicación nula pues:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n 2^n x \text{ para}$$

$0 \leqslant x \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, es decir para $x = 0$

y

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n f_n(x) = 0 \text{ , para } 0 = \lim_{n\to\infty} (2^{1-n}) \leqslant x \leqslant 1$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0,1] \Longrightarrow f_n \xrightarrow{\text{MACKEY}} 0$

pero $(f_n)_{n\geqslant 1}$ no es $\mathcal{T}_F$-acotada; es decir, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ no es acotada para la norma del sup. En efecto, pues, para cada $n \geqslant 1$

$$\| f_n \| = \sup_{0\leqslant x \leqslant 1} | f_n(x) | = 2^n; \quad \text{luego}$$

$$\| f_n \| \longrightarrow +\infty \text{ si, } n \longrightarrow +\infty$$

$\Longrightarrow (f_n)_{n\geqslant 1}$ no es $\mathcal{T}_F$-acotada. Así pues el espacio $(\mathcal{C}([0,1]), \| \|_\infty)$ no satisface la propiedad 4.3.11.e Debe existir entonces, al menos un espacio normable E, y una aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado, pero que no es continua.

En el ejemplo 2.1.6, podemos observar que uno de esos espacios normables es:

$$E = \left\{ x \in \mathcal{C}[0,1] \,/\, x' \in \mathcal{C}[0,1] \right\}$$

CONCLUSION

El trabajo realizado no ha sido sencillo, mas bien arduo; pero al mismo tiempo sumamente interesante, lo cual facilitó la realización de nuestra tesis. Nuestro aporte ha sido el de organizar el material de demostrar de una manera propia más de la mitad de las proposiciones y abordar con un toque de originalidad el resto de las mismas. No queremos decir con esto que las demostraciones que hemos realizado (de las primeras que hablamos) no hayan sido hechas anteriormente, pero sí que la bibliografía con la que contamos no las hacen, sencillamente las enuncian. Algunas de las proposiciones las hemos enunciado y demostrado nosotros mismos por necesitar de ellas.

Definitivamente que de los temas desarrollados por nosotros en la tesis, es el capítulo 4 el más importante. Consideramos que el teorema de Mahowald y los teoremas tipo Mahowald para σ-tonelados y s-tonelados son los resultados más interesantes, pues caracterizan las condiciones mínimas (la de ser tonelado, σ-tonelados ó s-tonelado, según el caso) del espacio de salida E, cuando el de llegada es Banach. (ℓ^{∞} , cuando E es σ-tonelado; c_0, cuando E es s-tonelado). Es también en el capítulo 4 (secciones 4.2 y 4.3) donde obtenemos potentes resultados equivalentes al teorema del gráfico cerrado, (En espacios tonelados y bornológicos), los cuales enriquecen el temario de nuestra tesís.

Los teoremas de la Aplicación Abierta y del Gráfico Cerrado, son temas para no acabar, siempre hay algo más por investigar. Inclusive en nuestra tesis, aunque hemos considerado tales teoremas únicamente en espacios lineales topológicos, nos queda varios tópicos sumamente interesantes por investigar. Por ejemplo:

1. El teorema tipo Mahowald para espacios d-tonelados, cuya demostración está en proceso de ser concluida. Si (E,τ) es un e.l.c. T_2 y $T \subset E$, T es un d-tonel si T es un tonel tal que:

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$$

donde $\forall\, n \geqslant 1$ $V_n \in \mathcal{V}(0,\tau)$ V_n es disqueada y cerrada; entonces (E,τ) es d-tonelado, si toda parte $\sigma(E',E)$-acotada del dual de E, reunión de una familia numerable de partes equicontinuas es también equicontinua . La definición anterior equivale a decir, que si T es un d-tonel entonces T es una vecindad del origen.

La demostración de este teorema está siendo desarrollado por nuestro asesor el Dr. Jorge Rojo. Es nuestro interés investigar conjuntamente con nuestro asesor en esta línea.

2. Yukio Komura propone una propiedad más general que las considerados por nosotros en 4.2 y 4.3. El considera una propiedad α que pudiera tener o no un e.l.c.,

dado un espacio E, dice que E tiene la propiedad $\bar{\alpha}$ si E tiene la topología l.c. final con respecto a una familia $(E_i, f_i)_{i \in I}$ donde para cada $i \in I$, f_i es lineal y E_i tiene la propiedad α. Por otro lado, considera un e.l.c. y T_2 (F, τ_F); define la topología sobre F, denotada por $\tau_F^{\bar{\alpha}}$, como la menos fina entre todas las topologías l.c. sobre F que tienen la propiedad $\bar{\alpha}$, que son más fina que τ_F.

Komura demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. Para todo espacio E con la propiedad α, y toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

b. Para todo espacio E con la propiedad $\bar{\alpha}$, y toda aplicación lineal f de E en F con el gráfico cerrado es continua.

c. Si τ es una topología sobre F, l.c. y T_2 tal que $\tau \leq \tau_F$, entonces $\tau_F^{\bar{\alpha}} = \tau^{\bar{\alpha}}$. Estamos interesados en investigar para que propiedades α y $\bar{\alpha}$ y cuáles espacios $(E, \tau_E^{\bar{\alpha}})$ se cumple el teorema de Komura; por ejemplo cuando α es la propiedad que el espacio (E, τ) es normable, entonces $\bar{\alpha}$ es la propiedad de ser ultrabornológico. Analizaremos que propiedades son equivalentes al teorema del gráfico cerrado en estos nuevos espacios, e investigar si pueden existir otros.

3. Queremos continuar con el estudio del teorema del gráfico cerrado en un espacio de De Wilde el cual ha sido definido recientemente, e introducimos a continuación: Una Web sobre un espacio E l.c. y T_2 es una familia $R = \left\{C(n_1,\dots n_k)\right\}$ de partes de E, donde $n_1, n_2, \dots$ varia en el conjunto de enteros positivos y que satisface la siguientes condición:

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} C(n_1), \quad C(n_1) = \bigcup_{n_2=1}^{\infty} C(n_1,n_2) \dots$$

$$C(n_1,\dots,n_{k-1}) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} C(n_1,\dots n_{k-1},n_k)$$

Diremos que R es del tipo $\mathcal{C}$ si para toda sucesión $(n_k)_{k\geqslant 1}$, $\forall\, k, n_k \geqslant 1$ existe otra sucesión $(\rho_k)_{k\geqslant 1}$, $\forall\, k\ \rho_k > 0$ tales que las condiciones:

$0 \leqslant \lambda_k \leqslant \rho_k$, y, $x_k \in C(n_1,\dots,n_k)$ $\forall\, k \geqslant 1$, implican que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ es convergente en E. Entonces llamaremos un espacio de De Wilde, a todo espacio (E, τ) l.c. y T_2 en el cual existe una Web de tipo $\mathcal{C}$.

4. Otro tópico que nos interesa investigar, es el de las aplicaciones del teorema del gráfico cerrado en las Ecuaciones Diferenciales.

Consideramos que el trabajo realizado sienta las bases para continuar nuestra investigación en los puntos anteriormente señalados, los cuales son temas de sumo interés en el estudio de los Espacios Lineales Topológicos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Horvath, John. Topological Vector Spaces and Distributions. Addison-Wesley Publishing Company. U.S.A. 1966.

[2] Horvath, John. Quelques resultats de M.H. Powell Sur le Théoreme du Graphé Ferme. Publicatiens du Département de Mathématiques. Lyon, 1973.

[3] Horvath, John. Locally Convex Spaces Summer School an Topological Vector Spaces, Bruxelles, 331 Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag. September 1973.

[4] Husain, Taqdir. The Open Mapping and Closed Graph Theorems In Topological Vector Spaces. Oxford at the Clarendon Press. England 1965.

[5] Husain, Taqdir. Topology and Maps. Plenum Press. New York. 1977.

[6] Komura, Yukio. On Linear Topological Spaces. Publicado por: Department of Mathematics. Faculty of Science. Kumamoto University. 1961

[7] Kreyszig Erwin. Introductory Functional Analysis With Applications. John Wiley and Sons. U.S.A. 1978.

[8] Mutaffian Claude. Algebra Multilineal, Productos Tensoriales y Exteriores. Instituto Cubano del Libro. 1971.

[9] Nachbin Leopoldo. Introduçao A Analises Funcional: Espacos de Banach e Cálculo Diferencial. Editado por la O.E.A. Departamento de Asuntos Científicos. 1976.

[10] Robertson A. and Robertson W. Topological Vector Spaces. University Printing House Cambridge. 2a. edición Great Britain. 1973.

[11] Rojo Jorge. Espacios Lineales Topológicos; Notas de Clase. Centro de Investigación y Post-Grado. Panamá 1981.

[12] Rojo Jorge. Teoremas del Tipo Mahowald para Espacios σ-tonelados y s-tonelados. Por aparecer.

[13] Schaefer H. H. Topological Vector Spaces The Macmillan Company, New York. 1966.